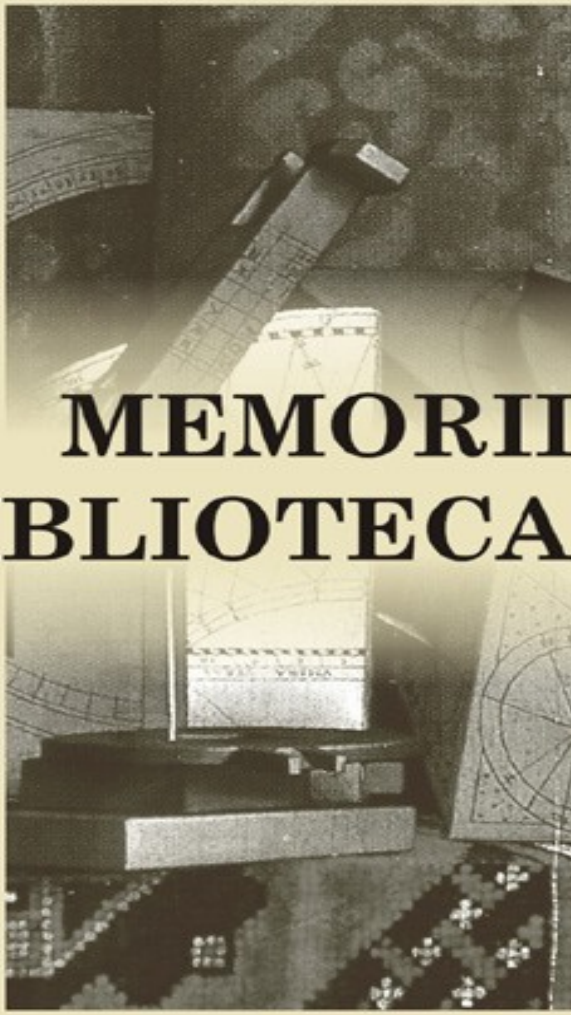


MEMORII
BIBLIOTECA

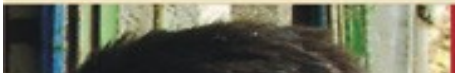
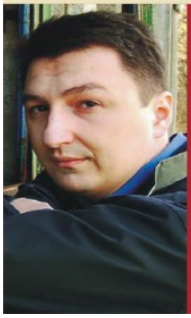


Table of Contents

Prolog
Versiunea întregită a realităţii
Cărţi privite dinlăuntru
Istoria unei viziuni medievale (o poveste de la 1350)
O provocare pentru vremurile noastre: predarea geometriei
Citindu-i pe Huygens, Newton şi Euler
Istoria lui Meusnier
Sophie Germain
Despre curbură (partea întâi)
Gheorghe Ţiţeica
Povestea lui Sebastian Kaufmann şi a Gazetei matematice de acum un veac
De la Programul de la Erlangen, al lui Felix Klein, la poemele lui Ion Barbu din Joc secund
Între laborioasa barbarie şi umanismul cel nou: istoria şi semnificaţia spaţiilor Barbilian
Un exemplu de teorie al cărei timp se stinge
O prezenţă: Laurenţiu Panaitopol
Povestind matematica în vremuri schimbătoare
Nu e vorba doar de forma universului, ci şi de logica lui
Despre curbură (partea a doua)
Cum să trăieşti matematica: mic îndreptar
Diamantul din moştenirea de familie
Codul secret – note pentru o mărturisire literară –

MEMORII DIN BIBLIOTECA IDEALĂ



Bogdan Suceavă

POLIROM

Bogdan Suceavă

MEMORII DIN BIBLIOTECA IDEALĂ

POLIROM
2013

© 2013 by Editura Polirom *www.polirom.ro*
Editura POLIROM
ISBN ePub: 978-973-46-3649-5
ISBN PDF: 978-973-46-3650-1
ISBN print: 978-973-46-3442-2
Coperta: Laurenţiu Midvichi
Pe copertă: Hans Holbein cel Tânăr (1498-1543), *Ambasadorii* (1533, detaliu)

BOGDAN SUCEAVĂ – născut la 27 septembrie 1969, la Curtea de Argeş. Studii la Universitatea Bucureşti, unde a obţinut licenţa în matematică (1994) şi diploma de studii aprofundate în geometrie (1995). Doctorat în matematică

la Michigan State University, East Lansing (2002), cu teza intitulată *Noi invarianţi de curbură riemannieni şi kaehlerieni şi subvarietăţi puternic minimale*, realizată sub îndrumarea lui Bang-Yen Chen. În prezent, profesor la California State University, Fullerton, unde predă, între altele, cursuri de geometrie diferenţială, fundamentele geometriei şi topologie. Autor de articole de matematică şi de istorie a matematicii. Membru al Pen Club West USA din 2005. Distincţii literare: Premiul I Nemira, secţiunea Purgatoriu, nuvele, 1993, pentru nuvela *Imperiul generalilor târzii*; Premiul Copy Ro, 2002, pentru volumul *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*; Premiul pentru proză al Asociaţiei Scriitorilor din Bucureşti pe 2007 pentru romanul *Miruna, o poveste*; Premiul I al Reţelei literare pe 2010 pentru *Noaptea când cineva a murit pentru tine*. Volume de proză şi eseuri: *Teama de amurg* (Topaz, 1990), *Sub semnul Orionului*, roman (Artorint, 1992), *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*, nuvele (Dacia, 2002; ed. a II-a, LiterNet, 2003), *Bunicul s-a întors la franceză, istorii* (Editura T, Fundaţia Timpul, 2003; ed. a II-a, LiterNet, 2008), *Venea din timpul diez*, roman (Polirom, 2004; ed. a II-a, 2010), *Miruna, o poveste* (Curtea Veche Publishing, 2007), *Distanţe, demoni, aventuri* (Tritonic, 2007), *Vincent nemuritorul*, roman (Curtea Veche Publishing, 2008), *Noaptea când cineva a murit pentru tine*, roman (Polirom, 2010).

Prolog

Dacă visul matematicienilor pursânge e să demonstreze teoreme care să le poarte numele, visul meu a fost să înţeleg până la ultima consecinţă nu doar anumite idei matematice, ci şi de unde provin aceste idei, filiaţia lor istorică, evoluţia lor în timp. Iubesc cercetarea matematică, şi mi se întâmplă să fiu captivat în întregime de ea pentru perioade îndelungate. Mi se întâmplă să devin dependent de bucuria de a descoperi ceva nou. Dar asta nu înseamnă că bucuria întâlnirilor din bibliotecă s-a diminuat vreodată. Înţeleg că astfel de întâlniri pot fi

prilejuite în egală măsură de literatură, de fizică, de chimie sau de biologie. Descrierea acestor bucurii e miza paginilor care urmează.

Chiar şi atunci când vorbesc despre un domeniu în aparenţă atât de puţin personal precum geometria, descriu experienţe personale. În paginile acestea va fi vorba despre întâlnirea cu idei matematice sau cu lucrări ale unor autori care s-au stins demult. Alteori va fi vorba despre întâlniri directe, din viaţa reală, întâlniri prilejuite de matematică. Nu cred că întâlnirile acestea au fost întâmplătoare, ci că ele au fost justificate de idei matematice care au servit ca puncte de interes comun.

Probabil există unele conexiuni între ceea ce am învăţat studiind matematica şi literatura pe care am scris-o. Probabil povestind despre aceste puncte de contact şi despre interesul meu pentru anumite teme am să fiu mai aproape ca oricând de ocazia de a descrie cultura în care m-am format şi care mi-a dat şansa unei formaţii duale. Astfel, includerea în acest volum a eseului din final, care este un text pur literar, e justificată tocmai de această dualitate.

Am ales să devin matematician la 13 ani, pe vremea când ştiam foarte puţin despre cultura cercetării matematice, şi de atunci nu mi-am schimbat opţiunea profesională. Indiferent cât de dificile au fost încercările care au urmat, nu mi-am regretat niciodată alegerea. Pentru mine, întâlnirea cu matematica a fost o experienţă structural diferită de cea a altor matematicieni. E posibil ca diferenţa să fi fost făcută de contextul cultural (iar nu cel politic) al unei asemenea alegeri personale în România anilor optzeci, în condiţiile societăţii şi ale valorilor de atunci. Poate îndelungata coabitare cu gândirea de tip literar a făcut ca opţiunea de a face matematică să devină, în timp, şi o experienţă literară, demnă de a fi povestită. E vorba despre o perspectivă literară aflată pe acelaşi plan cu experienţa personală a celui care se întâmplă să fie martor al unui eveniment important. Dacă eşti martor, e firesc să povesteşti ceea ce ai văzut şi e firesc să-ţi pui

problema convertirii textului într-un fel de istorie. În paginile acestea, subiectul e întâlnirea cu matematica, iar rezultatul final e filtrat printr-o asumată experienţă literară, aşa cum ai istorisi despre scrierea unui roman (pentru că întotdeauna există şi o poveste aflată în spatele unei cărţi).

În 2011, revista *Discobolul* şi-a propus realizarea unui număr (care până la urmă a avut dimensiunile unui întreg volum) care să includă un grupaj de texte dedicate raportului dintre matematică şi literatură. Invitaţia de a scrie un text pentru acel grupaj, care mi-a fost adresată de Adriana Teodorescu, a fost pentru mine cea mai plăcută surpriză care mi-a sosit vreodată din spaţiul publicaţiilor literare româneşti. Nu m-am aşteptat niciodată la asta. Natura temei mi-a îngăduit o abordare personală: interacţiunea dintre matematică şi literatură m-a învăţat să văd, dar am încercat să păstrez separat interesul meu pentru matematică de temele pe care le-am abordat în literatură. Invitaţia venită din partea unei reviste literare m-a făcut să aflu că există interes şi curiozitate pentru acest subiect. Cel puţin în cultura română, unde mulţi matematicieni s-au exprimat şi literar şi unde literaţii au fost suficient de inteligenţi ca să urmărească discuţiile importante care vin din spaţiul ştiinţelor exacte.

Nu în ultimul rând, datorez mulţumiri revistelor *Observator cultural*, *Timpul*, *Argeş*, *Familia*, *Historia mathematica* (a casei editoriale Elsevier) şi *Memoriilor ştiinţifice ale Academiei Române*, unde au apărut unele prime versiuni ale acestor texte (sau fragmente din ele). Ultimul eseu din acest volum a fost selectat de Norman Manea în antologia *Romanian Writers on Writing*, apărută la Trinity University Press. Am revăzut toate textele incluse în acest volum, pentru a asigura o prezentare unitară a acestor materiale. În unele dintre texte am operat schimbări importante, care fac ca primele lor versiuni să fie mult diferite de forma pe care o îmbracă acum. Unele capitole apar aici pentru prima oară.

Versiunea întregită a realităţii

Am înţeles teorema lui Thales mai târziu decât unii dintre colegii mei de clasă. În anul acela, în clasa a VII-a, am răspuns provocării matematice mai târziu decât alţii. Pe vremea aceea citeam romanele lui Karl May şi-mi păsa mai mult de desene animate decât de configuraţiile geometrice. Apoi, deodată, o transformare s-a petrecut, în primăvara din clasa a VII-a. A fost o aprofundare de natură calitativă, o diferenţă clarificatoare, un fel de deschidere a ochilor. Am putut face operaţii algebrice complicate şi am început să pot decodifica probleme de geometrie. Atunci a venit prima diplomă de la olimpiadele de matematică, la nivel naţional. Şi lecturile mele literare s-au schimbat sensibil. Copilăria rămânea în urmă. Învăţam pe atunci într-o şcoală din Târgovişte, într-o clădire cu arhitectură de secol al XIX-lea, foarte diferită în alcătuirea ei de şcolile celelalte, care arătau ca nişte paralelipipede. În anul acela am început să citesc romane cu o convenţie literară realistă, romane al căror raport cu realitatea era mai direct decât în volumele pe care le parcursesem mai înainte; în următorii doi ani aveam să citesc volume aparţinând literaturii franceze din veacul al XIX-lea, precum şi romane ale unor autori pe care îi simţeam foarte aproape, ca Panait Istrati, Zaharia Stancu sau Marin Preda. Încă de atunci, ghidat de un profesor care se pricepea foarte bine la zidirea unei culturi matematice elementare, am înţeles că una dintre cele mai importante cărţi pentru şcoală produse vreodată în cultura română a fost culegerea de probleme de geometrie a lui Gheorghe Ţiţeica (nu, nu e nicio exagerare în afirmaţia aceasta). Interacţiunea mea cu matematica lui Gheorghe Ţiţeica continuă şi azi, pe un alt plan, cu alte teme, pentru că între timp am lucrat vreme de două decenii geometrie diferenţială. Dar primul contact cu şcoala de geometrie de la Bucureşti s-a produs atunci, graţie culegerii de geometrie elementară pe care am început s-o lucrez într-un oraş de provincie. Pentru mine, evoluţia interesului pentru matematică şi a celui pentru literatură avea loc în

paralel, într-o relativă interdependenţă. Simţeam că sunt două forme de a mă exprima profund diferite, dar nu aş fi putut niciodată să le separ. S-a întâmplat foarte devreme: aveam nevoie de amândouă. Perioade de profundă concentrare pe seturi de probleme sau pe lectura articolelor publicate lunar în *Gazeta matematică*, pe care la 15 ani ajunsesem să o citesc cu fidelitate, alternau cu perioade când citeam literatură aproape continuu. Acesta e şi ritmul pe care-l am acum. Cred că cel mai frumos lucru care mi s-a întâmplat crescând în cultura română a fost această dualitate.

Verile citeam cel mai mult, în săptămânile de relativă izolare pe care le petreceam într-un sat din munţii Făgăraş. În vara dintre clasele a IX-a şi a X-a, înainte de a merge la Tabăra de vară a *Gazetei matematice*, care se desfăşura pe atunci în luna august la Curtea de Argeş, am citit *Triunghiul, ringul cu trei colţuri*, de Viorel Gh. Vodă. Am continuat să lucrez din culegerea lui Ţiţeica: vara aceea am trudit (şi verbul acesta e cel mai exact!) pe capitolul de probleme de loc geometric. Atunci mi s-a întâmplat să observ că volumul al II-lea din *Moromeţii* nu e la fel de plăcut la lectură ca volumul I. În săptămânile acelea am citit şi *Hronicul şi cântecul vârstelor* al lui Lucian Blaga. Către toamnă aveau să urmeze paginile de memorialistică ale lui Ion Minulescu sau George Topârceanu. Avansam în geometrie pe măsură ce ajunsesem să citesc şi autori care însemnau ceva în câmpul literaturii române. Nu înţelegeam poezia lui Ion Barbu, iar despre matematica lui nu ştiam nimic.

În toamnă am descoperit proza lui Balzac, cam în aceeaşi perioadă în care am învăţat cu adevărat cum se aplică trigonometria la geometria triunghiului. De fapt, în clasa a X-a cred că am avut un oarecare avantaj în materie de trigonometrie faţă de alţi concurenţi la olimpiade. Ritmul lecturilor mele s-a încetinit întru câtva, pentru a se relua după examenul de treapta a doua tot mai spornic, de data aceasta la un cu totul alt nivel. Începusem să citesc literatură universală. Autorii care m-au atras atunci, la

şaptesprezece ani, au fost Franz Kafka, Mario Vargas Llosa, John Fowles, F. Scott Fitzgerald, J.D. Salinger, între mulţi alţii. Nu mi-aş putea aminti de prima lectură din fiecare dintre aceşti autori fără a-mi aminti ce fel de matematică studiam pe atunci. Ştiu de pildă că atunci când am scris primul articol care mi-a apărut în *Gazeta matematică* (aveam 17 ani; articolul s-a numit „Observaţii asupra grupului de permutări" şi a apărut în nr. 11-12 din 1987) tocmai terminam de citit *America* lui Kafka. Nu-mi amintesc nimic din orele de fizică sau chimie şi nu cred că m-au interesat alte materii decât cel mult sporadic şi anecdotic (istoria m-a interesat, însă la Târgovişte nu am avut la istorie profesori buni), dar ceea ce se petrecea în literatură sau ce se alegea de anumite soluţii în matematică ajunsese să mă intereseze într-un mod foarte personal. Mă consideram un rezolvator de probleme, înainte de orice altceva. Îmi apărea evident încă de atunci că expresia cea mai clară a inteligenţei ar trebui să fie identificarea unei soluţii precise, optime, fie că e vorba de literatură sau de matematică. Credeam că literatura poate deveni importantă şi esenţială dacă arta de a spune o poveste, de a specula configuraţia particulară a unui moment şi a unei interacţiuni a unor personaje ajunge să fie la fel de relevantă ca şi o generalizare care ne adânceşte capacitatea de a înţelege un fenomen matematic. Ştiam că uneori putem rata, după cum la unele probleme nu putem găsi soluţia. E adevărat că cele mai multe dintre lecturile mele literare proveneau din perioada istorică a modernismului european sau erau lecturi recente ale unor autori care au integrat până la o rafinată simbioză teme ale modernismului. Dar pe atunci nu ştiam asta, pentru că nu priveam lucrurile în ordinea lor istorică. Acum ştiu că exista o rezonanţă secretă între lecturile literare care mă atrăgeau atunci şi un anumit stil de a face matematică ce mă fascina. Nu am avut, de pildă, în adolescenţă, o prea mare atracţie faţă de maşinăria infernală a analizei matematice, dar mai târziu aveam să găsesc fascinantă austeritatea de deşert polar a topologiei,

care este născută din necesităţile teoretice ale analizei matematice. Nu cred că există un produs intelectual care să poarte o mai pronunţată pecete a transformării moderniste a matematicii decât topologia. Iar întâlnirea mea cu acest domeniu al matematicii s-a petrecut în mai multe etape: am parcurs prima introducere a unor concepte fundamentale ale topologiei la 17 ani, sub îndrumarea profesorului Ilie Bârză (cu care în clasa a XI-a m-am pregătit în particular, înainte ca el să părăsească România, şi care nu a ezitat să-mi prezinte atunci, în liceu, elemente de teoria grupurilor şi de topologie), apoi am studiat elemente de topologie în cadrul unor cursuri de analiză matematică la Universitatea din Bucureşti, pentru ca elemente mai avansate de topologie algebrică să devină subiectul central al unor cursuri de specialitate pe care le-am urmat la Michigan State University, după 1996, când trecusem de 26 de ani.

De fapt, există un avantaj în a face din matematică o profesiune. Matematicienii au luxul de a fi mereu expuşi unor idei şi concepte noi. S-ar plictisi de moarte dacă ar face mereu unul şi acelaşi lucru, dacă ar trebui să revină asupra unei singure idei, pe care ar trebui s-o reitereze fără a-i adăuga un plus de conţinut. E inevitabil: dacă treci prin matematică decenii în şir, de la vârsta olimpiadelor din perioada gimnazială până în facultate, de la anii de doctorat (care au însemnat pentru mine cursuri urmate la zi, cu teme şi examene) până la anii de maturitate, în care ajungi să scrii lucrări de cercetare sau să construieşti singur un curs, e imposibil ca această experienţă să nu treacă în tine. Poţi face eforturi să o disimulezi, să o separi de tematica literaturii, dar ea rămâne la nivel structural, în zona jocului secund unde nimic anecdotic nu e îngăduit să răsară la suprafaţă. Matematica, în fond, e un exerciţiu al esenţializării, o artă a preciziei, a retragerii spre principiile ultime ale materiei. Am auzit afirmaţii similare făcute de filosofi, al căror domeniu s-ar dori a fi cel mai general dintre toate. Se poate. Aş fi pregătit să accept aşa ceva şi din partea filosofiei. Dar rămân la părerea că obiectele

matematice *există* şi că în asta rezidă toată tăria matematicii şi a educaţiei prin matematică.

O întrebare se impune: ce ar putea fi literatura, dacă ea îşi propune să fie întregirea umanistă a matematicii? Cum anume ar trebui scrisă literatura de azi, atunci când toate eşafodajele ideologice şi iluziile s-au dărâmat, când geografia a fost înţeleasă, dar nu deţinem încă secretul întregii structuri a universului? Poate literatura să producă un act paralel de esenţializare, ca şi cum o poveste bine spusă ar fi echivalentul unei teoreme de topologie? Astfel de gânduri mi-au reţinut atenţia atunci când am început să studiez matematică la Universitatea din Bucureşti.

Fireşte, analogii între matematică şi literatură pot exista, dar nu interesează deloc similitudinile de suprafaţă, ci paşii profunzi, disecţia prin calitatea materiei sau prin natura realităţii. O asemenea literatură ar trebui să se fixeze şi să captureze în soluţii optime din punct de vedere narativ momentele-cheie ale unei realităţi (ale culturii române sau ale oricărei alte culturi în care autorul ar dori să lucreze), la fel cum Stefan Zweig şi-a propus să ilustreze momentele astrale ale omenirii.

Dintr-o astfel de literatură se poate învăţa, pentru că ea atinge momente de adâncime. Este instructivă şi poate fi şi amuzantă, poate fi şi atractivă. Pe de altă parte, nu se poate clădi aşa ceva pe reţete. Apar şi dezavantaje de marketing: cu cât este mai inteligentă observaţia, cu atât mai restrâns poate fi accesul publicului larg. În fond, teoremele profunde nu sunt pentru toată lumea. Ne atrage profunzimea lor, dar e clar că nu sunt destinate unui public larg. E adevărat că, dacă mergi până la capăt, e foarte posibil ca nimeni să nu aibă capacitatea de a cuprinde întregul, nici de a aprecia diametrul cuprinderii. Nu e o afirmaţie orgolioasă, ci una cât se poate de exactă.

De fapt, cred că viziunea noastră nu e întreagă dacă se concentrează numai asupra literaturii sau dacă frecventează numai una dintre ştiinţele exacte. Un drum întreg ar trebui să treacă prin profunzimi din ambele teritorii. Azi, nimeni nu mai poate încerca să cuprindă un

întreg domeniu de dimensiunile matematicii contemporane într-o viziune culturală de anvergura celei pe care Leonhard Euler a avut-o în timpul său. Dar ceea ce se poate e un alt fel de cuprindere: o dezvoltare bivalentă a înţelegerii. Nu există şcoală pentru aşa ceva, deci o parte a drumului nu se poate face decât în solitudine. Privite din afară, cele mai importante momente de reflecţie pot apărea drept tăceri sau întârzieri. Eforturile cele mai reuşite vor fi şi cel mai dificil de comunicat. Ceea ce ar fi putut apărea drept performanţă intelectuală în perioada de glorie a modernităţii, de acum un veac, poate apărea drept excentricitate astăzi. Şi nu e acesta singurul risc.

Nu aş fi putut discuta relaţia dintre matematică şi literatură fără a încerca să descriu procesul de elaborare a unei asemenea dezvoltări: am făcut matematică vreme de două decenii, răstimp în care am scris câteva romane, câteva nuvele, câteva serii de poeme. Care e finalitatea acestui drum? Unde am ajuns acum? Ce am aflat la capătul acestui drum? Dacă are vreun sens, aici ar trebui să-l consemnez. Iar cititorul ar trebui să aibă îngăduinţă dacă discuţia ar atinge accente tehnice.

Am un răspuns foarte personal la această întrebare importantă, despre finalitatea acestei dezvoltări personale. Pot spune acum ce mi-a plăcut cel mai mult în matematică. Şi pot s-o fac într-o manieră care de obicei se aplică literaturii. Pentru a da un exemplu, ar trebui să menţionez aici care au fost lucrările de geometrie diferenţială (aceasta este specialitatea mea în domeniul matematicii) cele mai frumoase, şi pot explica în ce constă această frumuseţe. Aş putea spune ce m-a atras, ce mi-a plăcut, şi ar trebui să încerc să identific principiul acestei opţiuni personale. Pentru a da răspunsul la această întrebare ar fi suficient să amintesc aici o listă de lucrări de matematică importante, esenţiale şi frumoase şi ar trebui să spun în ce anume rezidă calitatea lor. E vorba, astfel, de o listă de lecturi esenţiale, o listă care reflectă opţiunile mele personale.

Un asemenea răspuns nu poate fi uşor, dacă

reprezintă finalitatea unei evoluţii personale; mai precis, aceste lucrări trebuie să fi fost citite nu pentru că au fost sugerate de şcoală, ci pentru că am ajuns la ele în mod necesar, urmând un studiu care a marcat o dezvoltare personală. Privite astfel, aceste lucrări sunt drumul meu, expresia unei experienţe profund asimilate, la fel cum lecturile din Franz Kafka m-au influenţat aşa de mult în adolescenţă. Atunci când predau studenţilor mei un curs de geometrie diferenţială, tot ceea ce le spun încorporează această viziune.

Ne vom limita în acest prim eseu doar la lucrările scrise după anul 1900 (tentaţia de a include şi lucrările mai vechi e mare, dar lor le rezervăm un loc aparte în capitolele următoare).

Întâi de toate, ar trebui să amintesc aici cele trei lucrări ale lui Gh. Ţiţeica prin care acesta a descoperit legătura dintre conceptul de curbură şi acţiunile grupului de transformări afin. Despre lucrările acelea, Dan Barbilian are o vorbă: „norocoasă intuiţie”. Îmi plac acele lucrări pentru că sunt expresia supremă a inteligenţei pure, acel maxim cultural pe care cineva care trudeşte în România poate spera să-l atingă. Pentru acea norocoasă intuiţie a stat Ţiţeica de atâtea ori în prezidiul secţiunilor de geometrie la Congresele Internaţionale de Matematică din epocă.

Apoi, a doua consemnare în ordinea istorică a lucrurilor ar trebui să fie lucrarea lui Mukhopadhyaya din 1909, *New Methods in the Geometry of Plane Arcs*, publicată în *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, acolo unde abordarea modernă asupra inegalităţii izoperimetrice este formulată pentru prima oară. O întreagă direcţie de cercetare s-a născut atunci, în zorii veacului, într-o revistă dintr-un colţ al Imperiului Britanic. Am înţeles importanţa acestei lucrări abia în primăvara lui 1999, când urmam cu Jon Wolfson la Michigan State University un curs superb de teoria geometrică a măsurii. Zece ani mai târziu, n-am rezistat şi am prezentat studenţilor mei la curs lucrarea originală.

Mai departe, ar trebui să amintesc aici eforturile lui Wilhelm Blaschke, cel care a dat formularea teoremei Gauss-Bonnet pe care o folosim azi. Superbă e lucrarea lui Dan Barbilian din 1934, în care a enunţat procedura de generare a metricii apolloniene. Superbă e lucrarea lui Sumner Byron Myers din 1940, în care stabileşte legătura dintre curbură şi topologie folosind calculul variaţional, prima legătură de acest fel descoperită vreodată. Frumoasă e lucrarea lui T.J. Willmore în care acesta enunţă conjectura care azi îi poartă numele1. (Apropo: aceasta este probabil una dintre cele mai importante lucrări publicate vreodată de o revistă românească. E vorba de lucrarea din 1965 intitulată *Note on Embedded Surfaces*, în Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I a Mat. [N.S.] 11B: 493-496. Lucrarea e citată masiv pe plan mondial.) Multe lucrări frumoase a lăsat Shiing-Shen Chern, dar cea care a plăcut cel mai mult studenţilor mei e o lucrare elementară despre proprietăţile globale ale teoriei curbelor, în care autorul reuneşte cele mai frumoase demonstraţii ale rezultatelor fundamentale ale teoriei. Lista ar putea să continue, dar mă opresc aici, la doar aceste câteva lucrări clasice; fiecare dintre ele îmi place la fel de mult cât îmi plac paginile din *Veacul de singurătate* al lui Gabriel García Márquez.

Nu am amintit aici numai lucrări de profundă contribuţie în cercetare (aşa cum sunt lucrările lui Ţiţeica şi Myers), ci şi contribuţii de sinteză sau abordări elementare asupra unor teme clasice. De ce o asemenea opţiune? Pentru că ele ilustrează cel mai bine ceea ce îmi place. O astfel de viziune se extinde şi asupra literaturii.

Cu lista lucrărilor de mai sus în minte, să vedem mai departe. Să tragem linie şi să însumăm: ce ne atrage aşa de mult la toate aceste lucrări? Ce înseamnă utilitate şi ce înseamnă frumuseţe? Când anume geometria încetează să mai fie terenul speculaţiei particulare şi devine mai mult decât ştiinţă profundă, mai precis: când devine model etic? Atunci când inteligenţa umană poate decripta un cod, poate trece dincolo de observaţia isteaţă, altfel accesibilă

oricui capabil a scrie un aforism percutant sau un vers inspirat, şi poate pune în evidenţă obiecte, spaţii, concepte, care nu mai fuseseră ghicite până atunci şi a căror importanţă poate să se reveleze deplin numai în anii ce vor urma. Frecventată astfel, geometria e arta deschiderii ochilor. Până ieri puteai privi, dar nu puteai vedea. Experienţa geometriei, dusă până la capăt, te învaţă că o operaţiune inteligentă de analizare a unui fenomen te conduce la distincţii esenţiale, dincolo de dificultatea tehnică, care e doar un stagiu preliminar al încriptării. Înveţi pe calea cea grea că orbirea noastră se datorează opreliştilor tehnice. Ne oprim pentru că nu putem calcula, când de fapt miza era descoperirea acelei categorii care se află la capătul calculului. Să ducem munca până la capăt, să depăşim dificultatea, iar atunci când nu avem unealta necesară, aşa cum nu a avut-o nici Myers şi a trebuit să o inventeze, să ne recunoaştem datoria de a dezvolta instrumentarul necesar până când el se perfecţionează suficient de mult ca să dea un răspuns precis căutării noastre. Aceasta este concluzia etică a cărei extensie asupra literaturii se poate imagina.

1. Pe 27 februarie 2012 Fernando Codá Marques şi André Neves au anunţat demonstrarea conjecturii lui Willmore. Lucrarea lor a fost publicată aici: http://arxiv.org/abs/1202.6036.

Cărţi privite dinlăuntru

Există momente irepetabile în viaţa fiecăruia dintre noi, momente a căror subtilă importanţă nu o recunoaştem atunci când, prinşi în mijlocul evenimentelor, ni se pare că aşa va fi întotdeauna. Pentru a da un exemplu din lumea teatrului, ne face plăcere să ne amintim de câte o montare dramatică izbutită, în care roluri memorabile şi o viziune regizorală originală ne poartă spre un moment plin de profunzime şi emoţie. Îmi amintesc, de pildă, de o superbă montare a dramatizării după *Numele trandafirului*, cu Radu Beligan în rolul principal, pe care am urmărit-o într-

un *preview* pe scena Naţionalului bucureştean. Sau, tot aşa, de o extraordinară interpretare a lui Radu Beligan în *Contrabasul* lui Patrick Süskind. De câte ori merg la teatru, mi-aş dori să retrăiesc momente intense ca acelea când, spectator, am fost profund emoţionat de o reuşită montare teatrală. Mi se pare că asemenea momente reuşite vor mai fi posibile, mă amăgesc că emoţiile spectacolelor de altădată ar putea fi retrăite.

Dar, de fapt, e posibil?

Ceva similar se întâmplă şi cu evenimentele remarcabile la care suntem martori. Voi povesti aici despre două cărţi pe care le-am văzut scrise. Nu voi vorbi despre cărţile mele, pentru că nimic din ceea ce am încercat eu nu se apropie de importanţa volumelor la care mă voi referi. Voi povesti despre două cărţi de matematică a căror laborioasă naştere s-a întâmplat să aibă loc sub ochii mei. Creşterea acelor cărţi, deşi nu au fost ale mele, mi-a determinat opţiunile şi m-a făcut la rândul meu să studiez anumite teme.

Bucureşti

L-am cunoscut pe regretatul profesor Stere Ianuş în primăvara lui 1988, înainte să dau admitere la facultate. Eram în clasa a XII-a şi nu făcusem până atunci niciun fel de meditaţii la geometrie. Făcusem pregătire în particular la alte materii, dar nu la geometrie, pe care nicidecum nu o neglijasem, dar pentru care nu urmasem meditaţii specializate. M-am întâlnit de puţine ori cu el, probabil nu mai mult de trei ori, şi de fiecare dată şedinţa a decurs la fel: mi-a dat probleme pe care eu le-am rezolvat. A fost un dialog pe care şi azi mi-l amintesc cu plăcere. După ce m-a urmărit pe parcursul acelor întâlniri, m-a asigurat că n-ar trebui să mă îngrijorez, că nu voi avea probleme la admiterea la facultate. După anul de armată, în care n-am făcut prea multă matematică, am devenit student în septembrie 1989, dar cursul de geometrie de anul I nu l-am urmat cu dl Stere Ianuş, ci cu dna Adriana Turtoi. Ne-am revăzut într-un moment plin de tensiune, în dimineaţa de 23 decembrie 1989, în amfiteatrul Stoilow, de la

Facultatea de Matematică, acolo unde decanul de atunci, profesorul de algebră Nicolae Radu1, încerca să administreze cu maximul de diplomaţie de care domnia sa ar fi putut face uz în prima zi de după căderea de la putere a partidului comunist. Profesorul Ianuş se afla acolo, alături de decan, şi ştiam cât de sincer se bucura de turnura politică a evenimentelor. Cu un an înainte aflase că nu mai putea călători în străinătate: vorbise prea mult la telefon cu Italia. Conversaţiile telefonice îi fuseseră monitorizate. Probabil că mai bine de 90% din conţinutul acelor conversaţii fusese pur şi simplu matematică, dar au fost dialoguri desfăşurate în italiană, pe care profesorul Ianuş o vorbea excelent. Să fi fost calitatea profesională şi abilitatea de vorbitor de italiană păcate înainte de 1989? Sigur că da, şi în afară de asta, matematicienii au o lungă tradiţie în a fi suspecţi. (Să amintim aici cum Sophus Lie, care era norvegian, a fost arestat din eroare şi era să fie executat ca spion de către francezi atunci când a izbucnit războiul franco-prusac, pentru că avea în bagaj caiete pline cu simboluri misterioase, într-o limbă care aducea a germană?) Omul acela mărunt la stat, cu ochi vii, atât de plin de energie, care păstra în camera lui din apartamentul de pe Calea Moşilor colecţia integrală din *Journal of Differential Geometry*, de la înfiinţare şi până la ultimul număr, putea fi oare văzut de cineva drept periculos din punct de vedere politic? Nu s-a sfiit să discute asta cu mine înainte de 1989. Nu l-au lăsat să mai călătorească în anii 1988 şi 1989, şi a fost un lucru absurd; după 1990 s-a dovedit că nici nu avea de gând să lucreze în străinătate, nici nu a făcut mai puţină matematică implicându-se în spaţiul politicii. Într-un articol din *Observator cultural*, Liviu Ornea s-a referit la memoria lui Stere Ianuş spunând că a fost un om care a făcut mult bine. Aşa este! Corectă apreciere şi dreaptă rememorare.

Am lucrat prima oară cu el la curs abia în anul III, adică în anul universitar 1991-1992, când am învăţat geometria diferenţială a varietăţilor, care pe atunci era un curs obligatoriu pentru 175 de studenţi de la secţia de

matematici pure. Ceva m-a atras în natura cursului, pentru că am ales să studiez şi mai multă geometrie, şi de atunci tot aşa a rămas. În anul următor (căci pe vremea noastră facultatea de matematică dura cinci ani), am urmat cu profesorul Ianuş cursul opţional intitulat *Capitole speciale de teoria relativităţii*, un curs clădit în jurul volumului său publicat la Editura Academiei în 1983, dar mult îmbogăţit cu puncte de vedere şi rezultate recente. Anul acela, profesorul Ianuş mi-a dat ca temă prezentarea la seminar a unui articol de Katsumi Nomizu; a fost prima dată când am citit despre metrici semi-riemanniene, cele care permit modelarea limbajului necesar teoriei relativităţii. În vara dintre anii III şi IV, puţin înainte de alegerile din 1992, când la putere a venit patrulaterul roşu, am discutat cu profesorul Ianuş despre perspectivele mele. M-a întrebat ce fel de matematică doresc să studiez. Nu mai doream să urmez analiză matematică, cum crezusem la 19 ani şi pentru care la Bucureşti exista o tradiţie superbă, doream de acum să fac geometrie. Probabil din pricina lui am devenit geometru şi am început să urmez cursurile opţionale ale catedrei de specialitate. Faptul că nu am ales să-mi scriu lucrarea de licenţă sub îndrumarea lui l-a rănit şi l-a deranjat. Un an mai târziu, într-o seară, pe coridorul din faţa Bibliotecii Institutului Academiei, m-a întrebat cu răceală de ce am optat altfel. A fost începutul unei lungi suite de neînţelegeri şi de ezitări în relaţiile dintre noi, diferenţe care nu au întrerupt prin nimic intensitatea comunicărilor ideilor matematice dintre profesor şi student. A continuat să-mi recomande referinţe, să-mi sugereze ce să citesc, să-mi spună ce ar fi important să aflu. Atunci când am urmat anul de studii aprofundate în geometrie (cum se numea vechiul nostru master), profesorul Stere Ianuş a pregătit şi ne-a predat un curs intitulat *Aplicaţii armonice între varietăţi riemanniene*, un curs actual şi util. A fost, alături de cursul la fel de interesant al dnei Adriana Turtoi, intitulat *Tehnici Bochner*, pe care l-am urmat în acelaşi an, cursul meu favorit de geometrie din câte am urmat la Bucureşti. Am

discutat enorm cu profesorul Ianuş anul acela, şi el mi-a sugerat să studiez mai în profunzime tema submersiilor riemanniene. Nu ar fi aici locul pentru a povesti despre ce este vorba, dar ar merita spus că descoperirea aşa-numitelor ecuaţii fundamentale ale submersiilor riemanniene2 s-a făcut relativ târziu în decursul dezvoltării geometriei diferenţiale moderne, abia în 1966. Nu exista pe atunci nicio monografie specializată care să fie dedicată integral submersiilor riemanniene, aşa că bibliografia obligatorie era compusă dintr-o serie de articole pe care le fotocopiam la Biblioteca Institutului. (Azi e mult mai simplu: *download*!) Astfel, de pe urma acelor dialoguri, teza mea de master a ajuns să trateze o temă de submersii Riemann şi a fost profund influenţată de interesele matematice de atunci şi de viziunea profesorului Ianuş, deşi nu a fost coordonată de domnia sa. Regret atmosfera de tensiune şi de diferenţe de perspectivă politică din perioada aceea, atmosferă care a marcat în multe feluri relaţiile personale din întreaga Universitate Bucureşti şi care a dăunat enorm nu doar şcolii de matematică, ci şi altor discipline. Era foarte multă tensiune şi mi-e greu să explic cum de a ajuns tensiunea aceea şi între noi. Inteligent ar fi dacă am aminti azi asta şi dacă n-am mai permite vreodată ca aspectele politice să se amestece cu cele profesionale. Câţiva ani mai târziu am văzut tratatul dedicat submersiilor riemanniene3 la care profesorul Ianuş a fost coautor şi care mi s-a părut a ilustra, ca structură, teme şi preocupări, multe dintre gândurile domniei sale. Sunt pagini întregi din carte care arată întocmai ca notele noastre de curs. Am avut ocazia de două ori, în anii din urmă, înainte să se stingă, să stau de vorbă mai mult cu profesorul Ianuş, graţie unor conferinţe de geometrie organizate în România. După atâţia ani, am discutat dincolo de orice veche pasiune. Am discutat despre teoreme şi despre oameni, despre ce înseamnă matematica pentru noi şi cât de importantă e ea pentru societate. Am descoperit că eram de acord cu toate aprecierile dumnealui asupra diverselor subiecte de discuţie, de la

matematică şi până la politică. La un moment dat, în vara lui 2008, profesorul Ianuş mi-a spus: „tu vei continua să faci şi matematică, dar şi literatură, în acelaşi timp”; de la una dintre acele conversaţii a venit, de fapt, şi ideea prezentului volum. Atunci am realizat că el era una dintre puţinele persoane care ştiau cu adevărat la ce mă gândesc şi ce planuri de viitor am.

Când am aflat că s-a stins, în urma unei maladii de nevindecat, am simţit că lumea mea e mai săracă. Mă bucur că viziunea lui a trecut într-un tratat remarcabil, care va rămâne o referinţă solidă pentru multă vreme pentru specialistul interesat de subiect. Cred că asta şi-a dorit cel mai mult şi cred că monografia pe care el şi coautoarele lui au dedicat-o submersiilor riemanniene reprezintă exact asta. Cum de nu am realizat atunci când aveam 24 sau 25 de ani că tema submersiilor riemanniene, despre care discutasem cu dl Ianuş, reprezintă atât de mult?

East Lansing

Am început studiile doctorale la Michigan State University în toamna anului 1996. Pe lângă cele două cursuri pe care le urmam în fiecare săptămână (fiecare însumând trei ore), mai existau şi cinci diferite seminare de cercetare în domeniul geometriei sau topologiei pe care profesorii de matematică le coordonau. Pentru un geometru, această structură de evenimente săptămânale era ideală. Azi, din păcate, nu mai sunt la fel la MSU. Au fost săptămâni când mergeam la toate aceste seminare, cu aceeaşi pasiune cu care, pe vremea când eram în Bucureşti, frecventam spectacolele Teatrului Naţional sau sesiunile Cenaclului de la Litere, cel coordonat pe atunci de Mircea Cărtărescu. Departamentul de Matematică de la Michigan State era mare, avea un corp profesoral amplu (62 de profesori), care putea susţine o activitate ştiinţifică bogată şi diversă. Din prima săptămână de şcoală am început să frecventez seminarul de geometrie diferenţială de joi dimineaţa, cel coordonat alternativ de profesorii Bang-Yen Chen şi David E. Blair. Era un grup activ, care pe

atunci comunica în fiecare săptămână rezultate noi sau găzduia câte o prezentare a unui oaspete venit dintr-o altă universitate. Seminarul de joi dimineaţa avea să devină punctul meu central de interes, neegalat decât de cursul de *Geometrie riemanniană*, pe care profesorul Bang-Yen Chen ni l-a predat în anul universitar 1998-1999. Cea mai mare parte a comunicărilor la seminarul de joi dimineaţa aparţineau profesorului Bang-Yen Chen, care traversa o extraordinară perioadă de creaţie. Din câte studiasem încă de la Bucureşti, ştiam că lucrează foarte mult, că e foarte activ, dar numai atunci când l-am văzut îndeaproape la lucru am avut percepţia incredibilei forţe imaginative de care dispune. Trebuie să vezi ca să crezi aşa ceva: era o forţă creativă de domeniul legendei. Am fost impresionat de perioadele când, săptămână de săptămână, profesorul Chen comunica noi rezultate la seminar. Iar prezentările de câte o oră explicau natura problemei şi creionau importanţa teoremei principale şi aplicaţiile ei: rareori era timp ca prezentarea efectivă să detalieze şi calculele. Pe acestea le studiam mai târziu, şi aveam avantajul că puteam să-i pun autorului întrebări despre anumite detalii tehnice. În acest seminar am văzut prima dată o anumită inegalitate geometrică implicând curbura lui Ricci, dintr-o lucrare pe care Bang-Yen Chen o publicase recent. Era înainte de a-mi alege subiectul de teză, dar de atunci am simţit că teoria se poate extinde şi că, probabil, generaţia mea îi va vedea extensiile şi aplicaţiile. Momentul impresionant avea să vină însă în 1999, atunci când autorul teoriei a prezentat în seminar ceea ce azi se numesc invarianţii de curbură ai lui Chen, în forma lor cea mai generală. Teza mea de doctorat avea să se nască din acest studiu şi avea să exploreze noii invarianţi de curbură şi proprietăţile lor. Scrierea ei s-a hrănit din atmosfera de fertilă inspiraţie pe care seminarul de joi dimineaţa mi-a transmis-o. După ce lucrările profesorului Chen au apărut în diverse reviste de matematică, mulţi autori le-au studiat, au folosit în cercetarea lor rezultatele obţinute de el şi i-au citat contribuţiile. Ceea ce mă întristează întru câtva (şi

asta se doreşte a fi o remarcă generală despre rosturile matematicii) e că fiecare teorie încununată de succes atrage imitatori. Şi teoria invarianţilor de curbură ai lui Chen a fost invadată de diverşi pasionaţi ai geometriei care, în lipsă de idei proprii, au imitat ceea ce Bang-Yen Chen a imaginat, transpunând ideile originale pe teritorii similare şi reproducând demonstraţiile dintâi, de cele mai multe ori într-o manieră mecanică. Urmând ceea ce am discutat de mai multe ori cu profesorul Bang-Yen Chen, nu mi-am propus să fac niciodată aşa ceva, ci să produc un act de cercetare onest, original, care să-mi dea măsura. Am rămas probabil de atunci cu instinctul de a nu produce două lucrări la fel, de a nu cădea în păcatul imitaţiei mecanice, de a nu repeta necreativ un act care iniţial fusese atât de util şi de inspirat. În perioada 1999-2002, când am lucrat la realizarea tezei mele, ritmul apariţiei de noi rezultate produse de profesorul Chen în domeniul inegalităţilor despre cantităţi geometrice reprezentând curbura a fost extraordinar. E posibil ca în multe cazuri eu să fi fost primul cititor al unor materiale.

În toamna lui 2011, profesorului Chen i-a apărut volumul4 intitulat *Geometrie semi-riemanniană, delta-invarianţi şi aplicaţii*, un tratat amplu de 500 de pagini reprezentând probabil cel mai impresionant tur de forţă menit să regândească din temelii ideea de curbură, într-un spirit care implică deopotrivă viziunea clasică, dar şi cea contemporană. Am deschis cu pasiune şi emoţie cartea atunci când a apărut. În cuprinsul ei, în câteva locuri, sunt menţionate şi câteva dintre eforturile mele, alături de rezultatele altor zeci de cercetători care au contribuit la extinderea teoriei. Abia în toamna aceea, când am avut cartea, am realizat că acesta trebuie să fi fost un alt moment important la care s-a întâmplat să fiu de faţă. Mi se pare extraordinar că anii noştri cei mai frumoşi se măsoară prin momente de luciditate, eventual prin adâncimea unor teoreme. În spatele lor se află tensiune şi nelinişte, intuiţie şi imaginaţie, şi apoi toate aceste străluciri se organizează într-un corpus unitar, crescut

dintr-o realitate austeră, situată în afara noastră, într-o sferă a seninătăţii clădită pe o stâncă indiferentă la situaţiile noastre trecătoare. Deşi ne gândim neîntrerupt la anumite concepte, atunci când la sfârşit vedem construcţia întreagă e imposibil să nu ne încerce o oarecare emoţie, ca în faţa unui ansamblu arhitectonic care ne impresionează. În cele din urmă, e irelevant unde ne aflam când am înţeles un anumit detaliu tehnic. Ceea ce contează în primul rând e construcţia.

1. Pentru informaţia de natură istorică, ar trebui adăugat că Nicolae Radu a fost coautor cu Dan Barbilian al unui articol apărut în 1962.

2. Descoperirea îi aparţine lui Barrett O'Neill, de la UCLA. Atunci când unul dintre foştii doctoranzi ai lui B. O'Neill, Edsel Stiel, a ieşit la pensie, în 2002, de la Cal State Fullerton, Departamentul de Matematică a scos postul la concurs şi a sfârşit prin a mă angaja pe mine, care veneam de la alt capăt al lumii, dar aveam o formaţie academică similară profesorului în locul căruia am fost angajat. Ceea ce mă atrăsese în anunţul oficial al concursului a fost tocmai descrierea profilului postului.

3. Maria Falcitelli, Ana Maria Pastore, Stere Ianuş, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific Publishing Co., 2004.

4. Bang-Yen Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Applications*, World Scientific Publishing Co., 2011.

Istoria unei viziuni medievale (o poveste de la 1350)

Orice imagine poate fi descrisă printr-o serie de contururi. Unele dintre ele sunt drepte, altele curbate, iar unele sunt o combinaţie1. Aceste contururi apar peste tot: sunt amprentele noastre, curbele de nivel ale unei hărţi, conturul feţei într-o fotografie, urma unui organ intern într-o imagine tomografică, traiectoria unui avion pe cer sau arcada de susţinere încorporată într-o construcţie arhitectonică. Ne interesează să înţelegem forma acestor

contururi şi să extragem din analiza lor maximum de informaţie utilă.

Dacă vrem să discutăm despre momentul istoric când e consemnată pentru prima oară ideea de curbură a unei curbe, trebuie să mergem în veacul al XIV-lea, în Franţa, pe vremea lui Nicole Oresme. Povestea pe care o vom spune aici ar merita menţionată: e o idee care aparent nu provine de la vechii greci; sau poate provine dintr-o sursă care s-a pierdut între timp.

De origine normandă, Oresme a studiat la Colegiul Navarrei, o instituţie fondată în 1304 de Ioana, regina Navarrei, pentru studiul artelor, filosofiei şi teologiei de către studenţii care erau prea săraci ca să meargă la Universitatea din Paris2. Vreme de secole, Colegiul Navarrei şi-a îndeplinit rolul istoric de a acorda o şansă în ceea ce priveşte educaţia unor tineri proveniţi din medii mai sărace. Aici, Nicole Oresme a studiat artele cu profesori ca Jean Buridan şi Albertus de Saxonia, şi tot aici a scris cele mai importante dintre tratatele sale. Unul dintre ele este *De proportionibus proportionum*, în care discută anumite aspecte care astăzi ţin de algebră. În primul capitol, Oresme vorbeşte, între multe altele, despre media aritmetică şi media geometrică a două numere. Un alt tratat este *Ad pauca respicientes* (titlul e dat de primele cuvinte din tratat şi înseamnă *Privind anumite lucruri*), în care Oresme analizează, între altele, mişcările corpurilor cereşti. În această carte, el studiază deplasările unor mobile care urmează traiectorii circulare concentrice, şi citim aceste pasaje ştiind că autorul avea în minte în principal mişcările aparente ale planetelor. După ce şi-a primit aşa-numita *licence* în teologie, adică echivalentul doctoratului actual, în anul 1356, Oresme a primit o poziţie de conducere la Colegiul Navarrei, pe care avea să o ocupe până în 1362. În perioada aceea a scris multe dintre masivele sale tratate în latină, pe care le vom menţiona mai jos. În jurul anului 1356 avea deja relaţii apropiate cu viitorul suveran Carol al V-lea cel Înţelept (care a domnit între 1364 şi 1380). În 1362 a primit o poziţie importantă

la Catedrala din Rouen, iar în 1364 a devenit decan al Catedralei (unii comentatori au speculat că ar fi fost în acelaşi timp şi capelanul suveranului). Cu sprijinul regelui, a devenit episcop la Lisieux în 1377, unde s-a stins în 1382. Acestea ar fi datele istorice, care trasează o biografie similară cu a unor personaje din romanul *Numele trandafirului.*

În perioada când a fost la Rouen[3], Oresme l-a tradus pe Aristotel din latină în franceză. Această versiune a volumului *De caelo* al lui Aristotel are o istorie curioasă. A fost tradus din greacă în latină de Robert de Lincoln, pe la 1250, o traducere corectată şi completată de William de Moerbeke în jurul anului 1265, iar această versiune latină a stat la baza traducerii în franceză pe care a făcut-o Oresme. După unele opinii, se pare că Oresme nu cunoştea limba greacă şi de aceea a recurs la latină pentru a intermedia traducerea din Aristotel. Exegeza ulterioară pe textele lui Oresme a produs observaţii de mare minuţiozitate, cineva sugerând că unele dintre lucrările lui au fost scrise de mai multe mâini, ceea ce sugerează un proces complex de copiere sau probabil de dictare[4]. Aceste informaţii sunt importante pentru că plasează într-un anume context cultura din perioada istorică în care a trăit Nicole Oresme şi justifică semnul de întrebare asociat paternităţii unora dintre ideile pe care le regăsim în opera sa.

Între tratatele lui Oresme se numără şi *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, scris probabil între anii 1351 şi 1355[5] şi care a rămas vreme de veacuri în manuscris. Versiunea pe care cercetătorii de azi o consideră ca fiind cea originală a fost recuperată după compararea a paisprezece cópii care au circulat pe cele mai diferite traiectorii. Acest tratat, pe care îl vom numi pe scurt *De configurationibus*, atinge performanţe neaşteptate pentru ştiinţa epocii. Întâi de toate, Nicole Oresme vorbeşte despre uniformitate şi diformitate[6], în formulări care îl înscriu printre precursorii calculului diferenţial modern, dar fără să apară undeva ideile

moderne de funcţie sau de calcul cu funcţii. În partea întâi a tratatului *De configurationibus* regăsim, în capitolele 20 şi 21, ideea de curbură prezentată într-o manieră deloc diferită de o explicaţie intuitivă potrivită şi pentru zilele noastre7.

Raţionamentul lui Nicole Oresme este următorul. Pentru el, curbura are, la fel ca şi alte „calităţi", „extensie şi intensitate", iar „un anumit fel de curbură este uniform, în timp ce altul este diform". După aceste expresii vedem că, deşi intuiţia nu-i lipsea deloc, Nicole Oresme ar fi beneficiat foarte mult de pe urma limbajului funcţiilor. Ar fi putut spune, de pildă, că se gândeşte la funcţia curbură în funcţie de un parametru. Dar pe atunci nu exista această terminologie. Şi mai e ceva în legătură cu limbajul. În limbajul contemporan nouă, curbura unei curbe plane într-un punct este un număr asociat curbei în punctul respectiv. Or, la Oresme terminologia nu include această distincţie: linie curbă şi curbură sunt desemnate de el prin acelaşi termen, *curvitas.*

Să urmărim raţionamentul lui Oresme pe figură. El consideră linia dreaptă *AB* şi două linii curbe *AC* şi *AD*, cu care linia dreaptă are în comun punctul *A.* Oresme propune să se spună că linia *AD* este mai curbată decât linia *AC* dacă unghiul *BAD* este mai mare decât unghiul *BAC.*

Asta este, firește, o idee intuitivă, dar e încă departe de pasul esenţial, cel care ar răspunde cel mai bine provocării definiţiei. În fond, ce ne-am dori de la o definiţie a curburii? Ne-am dori să asociem curburii un număr. Ne-am dori să trecem de la *formă* la *cantitate*, pentru ca informaţia calitativă să devină cantitativă şi să putem opera cu curburi aşa cum operăm cu orice alte cantităţi. Aici, Nicole Oresme porneşte de la ideea că „orice curbură circulară este uniformă şi reciproc, iar orice altă curbură este diformă" 8.

În capitolul 21 al tratatului *De configurationibus*, Nicole Oresme prezintă o definiţie a curburii. Iată pasajul latin: „Sit circulus maior cuius semidyameter sit *AB* et circulus minor cuius semidyameter sit *AC*. Si ergo semidyameter *AB* dupla est ad semidyametrum *AC*, curvitas minoris circuli erit duplo intensior curvitate maioris, et ita de aliis proportionibus et curvitatibus". Adică: „Fie un cerc mare de rază *AB* şi un cerc mic de rază *AC*. Dacă raza *AB* este dublul razei *AC*, atunci curbura cercului mai mic va fi de două ori mai intensă decât curbura cercului mai mare, şi similar pentru alte proporţii şi curburi".

Aceasta e prima apariţie documentată a ideii. Şi azi, când explicăm la curs conceptul de curbură, în sens modern, în aceşti termeni prezentăm intuitiv ideea. Julian Coolidge, un geometru şi istoric al matematicii care a discutat apariţia ideii9, îşi punea o întrebare mai mult decât legitimă: oare a fost ideea lui Nicole Oresme? Dacă da, atunci avem de-a face cu un fulger din senin, pentru că nimic în literatura precedentă nu prevestea această definiţie. Iar pregătirea academică a autorului nu promitea o astfel de contribuţie. Dar dacă nu a fost ideea lui? Căci veacul al XIV-lea era un veac al compilaţiilor şi al sintezelor, al cronicilor cu surse amestecate, al traducerilor din surse neaşteptate, al lucrărilor scrise la mai multe mâini. Întrebarea asupra paternităţii acestei idei e legitimă: oare textul lui Oresme să fi fost sursa primară a ideii? Există oare vreo lucrare mai veche, de care Oresme avea ştiinţă şi pe care omite să o citeze, unde se discută despre curbură în aceşti termeni? Firește, e foarte posibil ca ideea să fi fost a lui şi paragraful amintit mai sus să fie mărturia unei intuiţii geniale, demnă de povestit şi de admirat şi la mai bine de şase veacuri de atunci.

Cum arăta lumea lui Nicole Oresme? Una dintre cele mai bune descrieri ale Franţei acelei vremi sunt *Cronicile* lui Jean Froissart, care consemnează în perioada 1348-1350 venirea ciumei negre, precum şi apariţia, în 1349, a procesiunilor de autoflagelanţi venind din Germania.

Aceştia erau, spune cronicarul, oameni care făceau penitenţă şi se loveau cu bice din piele înnodată, cu ţepi de fier. Treceau pe străzile oraşelor cântând despre Sfânta Naştere şi despre suferinţele Domnului. Tot în perioada aceea, consemnează cronicile lui Froissart, au avut loc o serie de pogromuri împotriva evreilor, în întreaga lume, cu excepţia Avignonului şi a domeniilor Bisericii aflate sub protecţia Papei. În 1350, consemnează mai departe Froissart, a avut loc bătălia maritimă dintre spanioli şi englezi la Winchelsea, cea în care regele Eduard a poruncit cârmaciului său să îşi îndrepte vasul cu prora către o corabie spaniolă mult mai mare şi mai stabilă, strigând „I want to have a joust at it!”. Şi până la urmă s-a salvat capturând corabia spaniolă, pentru că cea veche s-a scufundat în plină bătălie (la o aşa idee, aşa final). Iar în 1356 a avut loc bătălia de la Poitiers, în care armata engleză a capturat regele francez, după o combinaţie care aminteşte de scopul strategic al jocului de şah.

Veacul lui Nicole Oresme nu a fost deloc, cel puţin în Franţa, unul al meditaţiilor şi al studiului în singurătate. Dimpotrivă, a fost o perioadă istorică plină de tragedii. Dacă definiţia curburii a fost gândită pentru prima dată în acele vremuri, atunci e una dintre cele mai mari surprize care ne vin din bibliotecă.

Am aflat că prima consemnare a conceptului de curbură apare la Nicole Oresme de la profesorul Bang-Yen Chen, într-o scurtă conversaţie pe care am avut-o în biblioteca Departamentului de Matematică de la Michigan State University, în toamna lui 1999. Am fost atât de surprins că o asemenea idee ar fi putut să fie concepută la mijlocul veacului al XIV-lea, încât am simţit nevoia să aflu mai multe despre contextul istoric al momentului. În fond, nu era conceptul de curbură ideea centrală pe care o studiam?

1. Oricât de simplă ni s-ar părea fraza aceasta, e o parafrază a unui pasaj cunoscut: aşa clasifica Aristotel locurile geometrice.

2. Acest colegiu a existat până la Revoluţia Franceză, iar clădirile lui au fost atribuite în 1805 recent înfiinţatei Şcoli Politehnice, creată un deceniu mai devreme de Lazare Carnot şi Gaspard Monge.

3. Aceste precizări provin din ediţia Nicole Oresme, *Le livre du ciel et du monde*, editată de Albert D. Menut şi Alexander J. Denomy, University of Wisconsin Press, Madison, 1968.

4. Întâlnim observaţia aceasta într-o teză de doctorat intitulată *The Questiones super De celo of Nicole Oresme*, susţinută de Claudia Kren în 1965 la Universitatea Wisconsin.

5. Această datare, care nu e deloc un lucru simplu, se datorează analizei lui Marshall Clagett, într-o reeditare a tratatului la University of Wisconsin Press, în 1968.

6. Unul dintre capitolele tratatului se intitulează „De qualitate uniformi et difformi".

7. Capitolul 20 se intitulează „De uno modo dicendi de curvitate quantum ed eius difformitatem". Capitolul 21 poartă titlul „De quodam alio modo dicendi de curvitate".

8. În original: „Omnis curvitas circularis est uniformis et econverso, et omnis alia curvitas est difformis". Oresme nu porneşte de la o presupunere hazardată: se poate specula că ideea aceasta e o continuare a proprietăţilor cercului, aşa cum apar ele în *Elementele* lui Euclid.

9. J.L. Coolidge, „The Unsatisfactory story of curvature", *American Mathematical Monthly*, 59 (1952), 375-379.

O provocare pentru vremurile noastre: predarea geometriei

Dacă subiectul nu mi s-ar părea important pentru România de azi, nu m-aş gândi să revin asupra acestei teme aici.

Am început să predau la California State University din Fullerton în toamna anului 2002. Pe atunci nu ştiam prea multe despre California, dar pe măsură ce am început

să înţeleg ce rol important are sistemul universităţilor de stat pentru societatea Californiei, contextul universitar mi s-a părut tot mai interesant. Mă aflam în şcoala care pregătea cei mai mulţi viitori profesori de liceu din sudul Californiei. Unul dintre cursurile pe care le aveam de predat era cel de *Fundamentele geometriei.* Cursul fusese gândit în urmă cu cinci decenii pentru a răspunde nevoilor studenţilor cu specializare în matematică pură, dar între timp dinamica audienţei cursului se schimbase: majoritatea studenţilor care optau pentru acest curs erau interesaţi de o specializare în didactică matematică. Aşadar, nu era vorba de viitori cercetători, ci de viitori profesori de liceu. Cursul fusese predat pentru multă vreme, înainte să încep să-l predau eu, după un manual interesant1, care includea între altele elemente de trigonometrie sferică, geometrie proiectivă şi calcul vectorial pentru a ajunge să expună idei pe care le regăsim şi în geometria de care avem nevoie pentru a înţelege teoria relativităţii. Am folosit acel manual în primăvara lui 2003 şi l-am găsit superb, după gustul meu, dar parcă îi lipsea ceva. Mi s-a părut că studenţii îl găseau prea abstract, că nu erau motivaţi să studieze conţinutul materiei. Îmi place să propun studentului la curs toată argumentaţia şi să ofer toată motivaţia de a se familiariza cu materia, care îmi doresc să fie cât mai utilă în viitoarea profesiune a studentului. Cel mai bine se lucrează cu studenţii atunci când ei ştiu că materia discutată la curs le serveşte în viitoarea lor meserie, când sunt convinşi că materialele cursului sunt actualizate şi că referinţele sunt la zi.

O haină nouă pentru povestea geometriei

Am început să discut cu studenţii şi să-i întreb ce i-ar interesa cel mai mult. Pentru studenţii care îşi propuneau să devină profesori de şcoală generală sau de liceu fundamentele geometrice ale teoriei relativităţii erau o curiozitate interesantă, dar nu mai mult de atât. Mi-au spus că nu vor folosi niciodată aceste concepte în munca lor. Şi atunci, ce cale ar fi trebuit să adopt? Era clar că acel

conţinut al cursului care se potrivea în 1987 avea o problemă de credibilitate a discursului în 2003, pentru că motivaţiile studenţilor erau altele. Există o dinamică a interesului universitar pe care, dacă eşti atent, o poţi înţelege în sala de curs. Am schimbat întreaga viziune a cursului, alegând ca manual o carte foarte interesantă2, mai recentă, axată în principal pe geometria neeuclidiană, mai precis pe semiplanul hiperbolic al lui Poincaré. M-am gândit că dacă studenţii mei de azi sunt viitori profesori de liceu, o analiză aprofundată a contextului logic (aşa cum geometria neeuclidiană ne permite să discutăm) ar putea fi cea mai interesantă extensie a culturii lor matematice. Am fost atât de mulţumit de abordare, încât am predat cursul cu acest punct de vedere în 2004 şi am repetat experienţa şi în primăvara lui 2005. Către finalul cursului foloseam pentru a modela geometria hiperbolică numere complexe, într-un tratament destul de tehnic, pe care l-am prezentat în detaliu. Din punct de vedere matematic, era cea mai firească abordare. Dar şi aici am simţit că pe studenţii care se pregăteau pentru a deveni profesori de liceu partea aceasta a cursului îi atrăgea cel mai puţin. Am analizat din nou toate manualele care erau disponibile, am început să citesc şi să studiez şi mai mult. Fiecare curs poate fi prezentat în foarte multe feluri, dar eu îmi doream exact acel punct de vedere pentru fundamentele geometriei care să servească cât mai mult studenţilor mei. Doream un curs în care fiecare oră să fie utilă şi interesantă. Văzusem un astfel de curs predat la Bucureşti de regretatul profesor Laurenţiu Panaitopol, cursul de metodică a predării matematicii. După ce terminasem facultatea la Bucureşti, predasem seminarul acestui curs în toamna anului 1995. Acum aveam nevoie de o idee care să fie la fel de utilă studenţilor din California pe cât le era de utilă ideea academică a lui Laurenţiu Panaitopol studenţilor care deveneau profesori de liceu în România. Abia în primăvara anului 2006 am găsit soluţia ideală, şi ea a fost prilejuită de publicarea cursului de fundamentele geometriei scris de Gerard Venema, pe care l-am suplimentat cu o discuţie

a lucrărilor originale. Am pornit de la următoarea întrebare: în fond, de ce studiem geometria? De ce este importantă geometria pentru învăţământul general? Nu pentru a lucra în viaţa reală cu triunghiuri şi cercuri: reprezentarea lor în lumea reală nu ne ajută prea mult. Ci pentru că geometria reprezintă cel mai bun antrenament al logicii. Nu aveam nevoie de nimic care să poată fi privit de studenţi drept o complicaţie artificială. Cursul meu trebuia să fie o poveste întreagă, care să includă tot conţinutul logic şi felul cum geometria antrenează intelectul pentru exerciţiul raţionamentelor formale.

Povestea pe care am spus-o la curs începe astfel. În cea de-a doua jumătate a secolului al XIX-lea, mai mulţi matematicieni au observat că sistemul axiomatic prezentat în *Elementele* lui Euclid nu e perfect. Mai precis, conţine erori de demonstraţie, greşeli de logică, afirmaţii care nu rezultă din premisele considerate. Faptul în sine e surprinzător, pentru că vreme de mai bine de două mii de ani *Elementele* lui Euclid au reprezentat referinţa primară pentru geometrie. Şi cu toate acestea, construcţia aceea nu fusese impecabilă. Prima unitate a cursului meu trebuia aşadar să detalieze structura sistemului axiomatic al lui Euclid şi lacunele pe care acesta le conţine, făcând trimitere la contribuţiile importante ale lui Pasch3 şi Peano4, contribuţii care au clarificat scopurile pe care metoda axiomatică ar trebui să le urmărească în fundamentele geometriei. Apoi, în chip de fericită întorsătură a situaţiei, trebuia povestit cum David Hilbert a construit, în ultimul deceniu al veacului al XIX-lea, primul sistem axiomatic al geometriei lipsit de lacune logice. Cursul meu trebuia să includă şi o prezentare a acelei extraordinare contribuţii.

Puncte de vedere utile şcolii de azi

În anii de după Primul Război Mondial, în Statele Unite a apărut nevoia de a prezenta publicului larg sistemul axiomatic al lui Hilbert. Încercând să explice acest subiect, G.D. Birkhoff a observat că abordarea lui Hilbert este dificilă şi greu de comunicat. Sistemul lui

Hilbert avea nu mai puţin de douăzeci de axiome şi necesita o subtilitate logică pentru care era nevoie de o experienţă pe care de multe ori studenţii nu o au. Astfel, Birkhoff a înţeles că ar fi mare nevoie de un sistem axiomatic mai simplu, conceput pentru a fi predat în liceu. Creaţia lui Birkhoff, un nou sistem de axiome pentru geometria plană, a fost rodul unui deceniu de reflecţie motivată de necesitatea de a pune la dispoziţia şcolii o teorie utilă procesului de învăţământ. Lucrarea[5] în care el a expus şi prezentat acest sistem axiomatic a fost publicată la începutul anilor treizeci în *Annals of Mathematics* şi a devenit, vreme de aproape trei decenii, cea mai importantă referinţă în materie de predare a fundamentelor geometriei pe înţelesul unui public cât mai larg. Avantajul sistemului axiomatic al lui Birkhoff era că folosea numai patru axiome şi, tocmai de aceea, avea o structură foarte simplă. Dar şi acest sistem dădea naştere unor dificultăţi tehnice, pe care eu le-am ilustrat la curs trecând în detaliu prin cele mai interesante demonstraţii. Am arătat că aşa se preda geometria în anii patruzeci, după ce Birkhoff şi-a publicat manualul, care s-a bucurat de atenţie şi a fost la vremea lui (a apărut în 1940) foarte util. Cu abordarea aceasta, studenţii mei au început să fie realmente interesaţi: le expuneam istoria predării geometriei în Statele Unite. Era istoria meseriei lor, era exact ceea ce le-ar fi fost cel mai util.

Abia la finele anilor cincizeci, Saunders MacLane, un experimentat cercetător interesat de problemele educaţiei, a revăzut sistemul axiomatic al lui Birkhoff şi a propus un nou sistem axiomatic. Această regândire a fundamentelor geometriei pentru a servi mai bine nevoilor şcolii avea să producă o adevărată revoluţie în materie de educaţie: după publicarea contribuţiei lui MacLane[6], abordarea asupra geometriei a fost ideală (în sensul că sistemul axiomatic prezentat publicului larg era corect din punct de vedere logic şi în acelaşi timp devenise accesibil şi liceenilor, ceea ce nu cred că se poate spune despre sistemul axiomatic al lui Hilbert). Primul manual scris în acest spirit a fost cel al

lui Edwin E. Moise. Cititorul care îşi aminteşte manualul românesc de *Geometrie* de clasa a IX-a din anii optzeci ştie despre ce este vorba: acel manual era scris în spiritul abordării axiomatice a lui Edwin E. Moise. Deci, acel manual era rezultatul unei evoluţii a prezentării metodei axiomatice în America de Nord. În manualul românesc se amintea care este sursa de inspiraţie încă din primele rânduri ale cuvântului înainte. Odată ajuns aici cu prezentarea istorică, cursul pe care îl predau viitorilor profesori îşi putea permite luxul de a deveni mai tehnic, de a considera un set de axiome, cel urmat de manualul lui Gerard Venema (a cărui a doua ediţie a apărut în 2012), şi de a urma apoi toate demonstraţiile, la un nivel de rigoare care de obicei nu e acoperit de manualele de liceu. Pentru că, trebuie spus, sunt lucruri subtile care ţin de fundamentele geometriei şi care au nevoie de demonstraţie riguroasă. Mai mult decât atât, la curs trebuie arătat cum anume repară abordările de azi lacunele logice pe care le conţinea sistemul axiomatic al lui Euclid. „Matematicile elementare sunt matematici de întemeiere”, scria Dan Barbilian în prefaţa unor note de curs. Iar Barbilian îl audiase pe David Hilbert, la cursul de fundamentele matematicii, în toamna anului 1921; întâlnirea aceea nu avea să fie fără urmări pentru formaţia celui care avea să predea în anii treizeci fundamentele matematicii la Universitatea din Bucureşti.

Geometria în secolul XXI

De ce am ţinut să comentez aceste lucruri în această serie de eseuri? Pentru că ceea ce se petrece în ultima vreme în multe sisteme şcolare din întreaga lume nu e de bun augur. A renunţa la punctul de vedere axiomatic în geometrie în favoarea unui mixaj (facil!) de geometrie analitică şi algebră este, pentru orice şcoală, în particular pentru şcoala românească, o catastrofă. Geometria nu ar trebui privită drept un suport pentru materiile inginereşti, ci e mult mai folositoare dacă îşi reia rolul de câmp de antrenare a logicii. Obiectele ei de studiu sunt naturale şi familiare (ne putem lesne reprezenta unghiuri şi drepte),

definiţiile nu sunt deloc complicate, toate premisele şi ipotezele se pot descrie complet, demonstraţiile sunt simple şi pot fi înţelese vizual. Mai mult, demonstraţiile au nevoie uneori de o idee netrivială, şi tocmai folosirea acestui pas calitativ reprezintă exerciţiul care pune în valoare natura argumentaţiei. Din pricina aceasta ar fi nevoie acum, mai mult ca oricând, de punctul de vedere axiomatic asupra geometriei, iar nu de o „barbarie calculatorie", după cum tot Barbilian scria altundeva. Nu voi insista aici asupra detaliilor tehnice ale cursului meu, asupra elementelor de geometrie avansată euclidiană sau hiperbolică pe care le demonstrez în partea finală a semestrului. Dar aceasta e povestea cursului de fundamentele geometriei pe care-l susţin la Cal State Fullerton în fiecare primăvară.

Dacă în anii şaptezeci şi optzeci geometria se preda inteligent în liceele din America de Nord şi Europa, ce s-a întâmplat oare cu abordarea aceea de a fost înlăturată în favoarea unor diluări care nu reţin valoarea educativă a ideii originale?

1. Patrick J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Cambridge University Press, Cambridge; ediţia I: 27 iunie 1986.

2. Saul Stahl, *The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, Jones and Bartlett Publishers, Boston; ediţia I: 9 aprilie 1993.

3. Moritz Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882.

4. Giuseppe Peano, *I principii di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca, Torino, 1889.

5. George David Birkhoff, „A set of postulates for plane geometry", *Annals of Mathematics*, 33 (1932), 329-345.

6. Saunders MacLane, „Metric Postulates for Plane Geometry", *American Mathematical Monthly*, 66 (1959), 543-555.

Citindu-i pe Huygens, Newton şi Euler

Olanda din vremea lui Christiaan Huygens, la jumătatea veacului al XVII-lea, era un spaţiu al libertăţii, unde toleranţa religioasă şi gustul pentru artă făceau casă bună cu interesul pentru cultură şi pentru comerţ. Era locul în care a venit să lucreze René Descartes (1596-1650), epoca lui Rembrandt (1606-1669), a lui Johannes Vermeer (1632-1675) şi a lui Benedict de Spinoza (1632-1677). Într-un astfel de spaţiu al interacţiunilor s-a născut formularea unei probleme importante: cum se poate construi un pendul ale cărui bătăi să fie egale şi care, astfel, să păstreze aceeaşi perioadă de oscilaţie pentru un interval de timp cât mai lung? Descoperirea datează din decembrie 1656 şi îi aparţine lui Christiaan Huygens (1629-1695).

Pentru un pendul obişnuit, care ar consta dintr-o tijă uşoară la capătul căreia s-ar afla o greutate, punctul material determinat de greutate descrie un arc de cerc. Un astfel de pendul nu ar fi un instrument bun pentru măsurarea timpului, pentru că perioada unei oscilaţii depinde de amplitudinea mişcării pe care o imprimăm pendulului. Cu cât îi deplasăm mai mult greutatea faţă de punctul de repaus, cu atât mai lungă va fi oscilaţia. Marea descoperire a lui Huygens este aceea că dacă greutatea nu ar oscila de-a lungul unui arc de cerc, ci de-a lungul unui alt tip de curbă, atunci ar exista posibilitatea ca intervalul de timp corespunzător fiecărei oscilaţii să nu depindă de amplitudinea mişcării de oscilaţie imprimate pendulului[1]. Huygens a numit o astfel de curbă *izocronă.* Ideea aceasta ne surprinde şi azi intuiţia, aşa că nu e de mirare că a contrariat în veacul al XVII-lea.

De fapt, curba parcursă de traiectoria descrisă mai sus fusese studiată înainte de o pleiadă de geometri, între care Galileo, Torricelli, Mersenne, Roberval, Fermat, Descartes sau Pascal, dar niciunul dintre aceştia nu a pus în evidenţă proprietatea ei de izocronicitate[2]. Era vorba despre cicloidă. Descrierea fizică a cicloidei e simplă. Să ne imaginăm o bicicletă mergând drept şi să considerăm

un punct fix de pe cauciucul uneia dintre roţi. În timpul deplasării, acest punct material descrie o cicloidă.

Acum să ne imaginăm că întoarcem această curbă invers. Ne-am dori ca greutatea de la capătul pendulului să descrie un arc de cicloidă, iar nu de cerc.

Dar cum să faci greutatea să oscileze de-a lungul unei traiectorii diferite de un arc de cerc? Şi aici intervine geniul lui Huygens: cicloida ca traiectorie a greutăţii de la capătul tijei nu se poate obţine în absenţa unor restricţii de mişcare. Aşadar, mişcarea tijei trebuie restrânsă între două plăci curbate de metal sau de lemn, care să oblige greutatea să descrie nu un arc de cerc, ci un arc de cicloidă. Când tija se mişcă pe traiectoria ascendentă, ea e obligată să se curbeze de-a lungul uneia dintre cele două plăci, astfel încât traiectoria greutăţii să nu fie un cerc. Când oscilaţia începe mişcarea descendentă, tija îşi recapătă forma rectilinie, apoi reîncepe traiectoria ascendentă în partea opusă.

Marele secret avea să fie forma pe care cele două plăci trebuie să o aibă. Huygens a calculat forma lor optimă şi a numit această curbă *evolutus* sau, cu un termen încetăţenit în traducerile mai vechi ale terminologiei, desfăşurătoare. Mai mult, Huygens a descris proprietăţile geometrice ale evolutelor în general, nu doar pe cele ale cicloidei. De fapt, evoluta este acea curbă care trasează centrele cercurilor de curbură ale unei curbe date, şi din acest motiv cercetarea lui Christiaan Huygens e amintită atunci când se discută istoria ideii de curbură. Poate că e curios, dar şi problema măsurării precise a timpului e legată de aprofundarea ideii de curbură.

Lucrarea, care a rămas în istoria matematicii, a fost publicată la Paris în 1673, cu o licenţă şi o aprobare formală din partea regelui Ludovic al XIV-lea, Regele Soare.

Interesant e că descoperirea curbei izocrone pare să fi fost una dintre primele idei matematice care au declanşat o adevărată bătălie economică pentru realizarea unor produse comercializabile. Pentru această

descoperire, Huygens a solicitat un patent de invenţie, care i-a fost acordat în 1657. Pe baza acestei recunoaşteri, el a încredinţat în exclusivitate dreptul de fabricaţie a unor orologii produse după ideea lui unui specialist în ceasuri din Haga, Salomon Coster. Cel mai vechi orologiu de acest fel care s-a păstrat e datat 1657 şi se află la Muzeul Boerhaave din Leiden. Nu la mult timp după aceea, un fabricant din Rotterdam, Simon Douw, a depus un patent prin care îşi propunea să fabrice un ceas foarte similar, care conţinea numai o modificare minoră. Huygens a văzut concurenţa lui Douw drept un plagiat dintre cele mai scandaloase.

Cuprins de un entuziasm caracteristic începuturilor, Huygens a făcut şi o estimare greşită. El a apreciat că orologiile fabricate pe baza oscilaţiei izocrone îşi păstrează precizia atât pe mare, cât şi pe uscat. Dacă pe uscat afirmaţia lui e neîndoielnic adevărată, în ceea ce priveşte aplicaţiile la arta navigaţiei Huygens a fost excesiv de optimist.

*

Am amintit mai înainte cercul de curbură. Studiul acestui fenomen geometric a fost aprofundat la mai bine de un deceniu de la apariţia lucrării lui Huygens de către Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nimeni altul decât importantul filosof raţionalist. În fapt, Leibniz a primit un exemplar al lucrării lui Huygens chiar de la autorul ei, în perioada când amândoi s-au aflat la Paris, între 1672 şi 16763. Ulterior, el a scris *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi,* în care numeşte cercul de curbură *cerc osculator4*. Această terminologie alternativă s-a păstrat până azi.

*

De la problema importantă a măsurării cu precizie a trecerii vremii suntem în măsură să trecem la prima abordare matematică a ideii de curbură. În 1736, a apărut la Londra *A Treatise of the method of fluxions and infinite series, with its applications to the geometry of curve lines*, de Sir Isaac Newton, purtând în subtitlu precizarea:

„traducere din originalul latin încă nepublicat”. Putem spune că aceasta e prima lucrare în care chestiunea curburii e tratată în mod sistematic. Capitolele poartă titlul problemelor pe care le discută. Enunţul celei de-a patra probleme pare inspirat din vechea geometrie a lui Euclid: „Să se deseneze tangente la curbe”. Problema a cincea este chestiunea pe care o discutăm noi aici: „Să se determine cantitatea curburii în orice curbă”. Problema a şasea duce discuţia un pas mai departe: „Să se determine calitatea curburii în orice curbă”.

În introducerea lucrării, Newton scrie, nu lipsit de oarecare emfază: „Observând că mulţi dintre geometrii moderni neglijează metoda sintetică a celor din vechime, ei dedicându-se în principal artei analitice şi graţie ajutorului ei depăşind atât de multe şi atât de mari dificultăţi, încât toate speculaţiile geometriei par epuizate […]: Acestui scop am considerat că n-ar fi nepotrivit ca, pentru folosinţa studenţilor în această ştiinţă, să concep tratatul ce urmează, unde am îndrăznit să extind fruntariile ştiinţei analitice şi să aduc îmbunătăţiri doctrinei liniilor curbe”.

Secţiunea care explorează tema curburii e cea care poartă ca titlu problema a cincea: „La orice punct dat al unei curbe date, să se determine cantitatea curburii”. Pasajul respectiv începe cu o judecată care consemnează opinia lui Isaac Newton despre această problemă: „Sunt puţine probleme privind curbele mai elegante decât aceasta sau care să ne dea o mai mare înţelegere asupra naturii lor”. Pentru rezolvarea problemei constând în determinarea curburii, Netwon enunţă următoarele patru premise:

„1. În acelaşi cerc, curbura este în orice punct aceeaşi, iar în cercuri diferite curbura e reciproc proporţională cu diametrele lor[5].

2. Dacă un cerc atinge orice curbă pe partea ei concavă într-un punct dat şi dacă forma ei este astfel încât niciun alt cerc tangent nu poate fi înscris în unghiul de contact mai aproape de acel punct, atunci acel cerc va

avea aceeaşi curbură ca şi curba în punctul respectiv de contact. Pentru că acel cerc care vine între curbă şi un alt cerc trecând prin punctul de contact variază mai puţin faţă de curbă şi se află mai aproape de curbura ei decât celălalt cerc considerat; aşadar, exact acel cerc e cel mai aproape faţă de curbura curbei, iar între el şi curbă niciun alt cerc nu se poate intercala.

3. Aşadar, centrul de curbură în orice punct al unei curbe este centrul cercului la fel de curbat şi deci raza de curbură sau semidiametrul de curbură e parte a perpendicularei care se termină în acel centru.

4. Iar raportul curburilor calculate în puncte diferite va fi aflat din raportul între curburile cercurilor cu aceeaşi curbură sau din rapoartele reciproce ale razelor de curbură".

De aici, problema devine într-adevăr una în care abordarea sintetică, în stilul geometrilor din vechime, vorba lui Newton, e utilă. Pentru că problema se reduce la aflarea centrului de curbură şi a razei de curbură.

Aceeaşi idee apare şi în studiile lui Leibniz şi Huygens.

*

Ce este aşadar curbura unei curbe măsurată într-un punct? Să sintetizăm ideea: Curbura este inversa razei acelui cerc care aproximează curba cel mai bine în punctul respectiv.

Să încercăm să explicăm vizual ideea aceasta. În figura de mai jos, cercul desenat este „aproape la fel" ca şi curba ce trece prin punctul *P*. Această aproximaţie rămâne adevărată numai pe o porţiune a curbei foarte aproape de *P*, dar nu şi pentru alte puncte ale curbei.

*

Odată ce am văzut ce înseamnă de fapt curbura unei curbe plane, ne propunem să vedem dacă putem extinde

această idee la suprafeţe. Va fi extensia uşor de făcut sau nu? În fond, cum am putea descrie curbura într-un punct pe o suprafaţă? Oricât de complicat ar suna, nu e deloc dificil de înţeles şi nici de reprezentat. Ideea se poate explica în câteva minute. Studenţii care urmează matematica întâlnesc această explicaţie atunci când studiază la curs geometria suprafeţelor.

Avem o măsură a dificultăţii acestei idei: cât a trecut din momentul clarificării definiţiei curburii pentru curbe plane şi până când definiţia pentru suprafeţe a fost stabilită, adică peste un secol şi jumătate. Dacă avem în vedere cronologia, ne dăm seama că ideea curburii unei suprafeţe nu e un lucru evident şi nu a fost tocmai uşor de determinat.

Să ne propunem ca unui punct situat pe o suprafaţă să îi asociem o valoare numerică, o valoare care să sugereze *forma*. Acel număr ar reprezenta valoarea curburii.

Să ne întoarcem în timp în anul 1760, atunci când Euler a publicat în cadrul *Memoriilor Academiei de ştiinţe din Berlin* o lucrare intitulată *Cercetări asupra curburii suprafeţelor.* Raţionamentul lui Euler descrie foarte bine dificultatea conceptuală cu care se confrunta el. „Ca să cunoaştem curbura liniilor curbe”, scrie Euler, „determinarea razei de curbură ne dă exact măsura justă, oferindu-ne pentru fiecare punct al curbei un cerc, a cărui curbură este exact aceeaşi. Dar, atunci când ne întrebăm asupra curburii unei suprafeţe, chestiunea e mai degrabă echivocă şi deloc susceptibilă de a primi un răspuns absolut, precum în cazul precedent”.

Aşadar, Euler nu are un răspuns pentru definiţia curburii unei suprafeţe! La aproape un secol de când Newton studiase problema pentru curbe, în a doua jumătate a secolului al XVIII-lea nu exista o definiţie clară a curburii pentru suprafeţe.

Euler continuă astfel: „Nu avem decât suprafeţele sferice cărora le putem măsura curbura, anticipând că de fapt curbura unei sfere este aceeaşi ca şi cea a cercurilor

ei mari[6] şi că raza ei ar putea fi privită ca măsura justă a curburii. Dar pentru alte suprafeţe n-am şti cum să comparăm curbura cu aceea a unei sfere, aşa cum putem oricând să comparăm curbura unei linii curbe cu cea a unui cerc; motivul e evident întrucât, în fiecare punct al unei suprafeţe, am putea avea o infinitate de curburi diferite. Nu avem altceva de făcut decât să considerăm suprafaţa unui cilindru, unde după direcţiile paralele axei nu avem curbură[7], în timp ce în direcţia secţiunilor perpendiculare pe axă, care sunt cercuri, curbura este aceeaşi, iar orice altă secţiune făcută oblic în raport cu axa ne va da o curbură particulară. E la fel şi pentru alte suprafeţe, şi chiar se poate întâmpla ca una dintre curburi să fie convexă, în timp ce alta este concavă, aşa cum se întâmplă pe punctele de pe o şa".

Aşadar, vedem că la 1760 înţelegerea fenomenului se afla încă pe teritoriul tatonărilor şi al speculaţiilor. Consideraţiile lui Euler, citite azi, ne apar mai degrabă imprecise. Chestiunea i se pare, aşa cum scrie el, *echivocă.* Câteva decenii mai târziu, Sophie Germain avea să scrie despre acest memoriu al lui Euler că e lucrarea care cuprinde tot ceea ce se ştia despre suprafeţe la vremea respectivă. Rămâne meritul lui Euler de a fi discutat ideea de curbură pe suprafeţe pentru prima oară. Or, din primele paragrafe remarcăm că punctul lui de vedere se confrunta cu o dificultate esenţială: nu avea la dispoziţie tocmai definiţia…

Mai departe, în memoriul amintit, Euler scrie: „Aşadar, chestiunea curburii suprafeţelor nu e deloc susceptibilă de un răspuns simplu, ci e supusă totodată unei infinităţi de determinări: căci, întrucât putem trasa prin fiecare punct al unei suprafeţe o infinitate de direcţii, ar trebui să cunoaştem curbura prin fiecare, înainte de a ne putea face o idee asupra curburii suprafeţei. Or, prin fiecare punct al unei suprafeţe putem face să treacă o infinitate de secţiuni, şi asta nu doar în raport cu toate direcţiile de pe suprafaţă, ci şi în raport cu înclinările lor diferite pe suprafaţă. Dar, pentru subiectul tratat aici, e

suficient să considerăm din infinitatea de secţiuni posibile la suprafaţă numai pe cele care sunt perpendiculare la suprafaţă, iar numărul lor e infinit. În acest scop, nu avem decât să desenăm dreapta perpendiculară pe suprafaţă [într-un punct fixat] şi să considerăm toate secţiunile care trec prin această dreaptă şi sunt aşadar perpendiculare la suprafaţă, astfel că pentru fiecare dintre aceste intersecţii trebuie să căutăm curbura, sau raza de curbură, şi ansamblul tuturor acestor raze ne va da corecta măsură a curburii la suprafaţă în punctul dat”.

Aşadar, Euler nici măcar nu a intuit răspunsul. Pentru Euler, curbura într-un punct de pe o suprafaţă e dată de totalitatea curburilor curbelor care trec printr-un punct şi sunt situate în plane normale. Nu sugerează el oare o infinitate de valori posibile? Da, dar asta nu este o valoare numerică, ci un concept vag. Eventual e un ansamblu de valori, o clasă de curbe sau de numere corespunzând unor curbe, dar nu valoarea numerică ce ne-ar putea servi în vreun calcul. În vremea aceea, înainte de Revoluţia Franceză şi de războaiele napoleoniene, definiţia curburii pe suprafeţe nu era încă pregătită să intre în scenă.

În schimb, Euler a demonstrat în studiul lui o teoremă interesantă despre studiul valorii maxime şi al valorii minime a curburii secţiunilor normale trecând printr-un punct de pe o suprafaţă. Fără acea observaţie importantă, probabil că multe dintre clarificările ulterioare nu ar fi fost posibile.

*

Pentru geometria diferenţială există un tratat amplu, în cinci volume, pe care mulţi geometri îl consideră drept referinţă de bază. Se numeşte *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* şi e scris de Michael Spivak. Această lucrare de mari dimensiuni izbuteşte să acopere cea mai mare parte a conceptelor cu care cei care lucrează în domeniu ar trebui să se familiarizeze. Într-un singur loc Michael Spivak izbuteşte să ne dezamăgească. În volumul II, în capitolul „Ce se ştia despre suprafeţe înainte de Gauss”, el scrie despre teorema lui Euler de

calcul al curburii unei curbe normale la suprafaţă printr-un punct dat: „Nu cunosc demonstraţia lui Euler pentru această teoremă şi, din motive care vor apărea mai târziu, sunt sigur că demonstraţia care va fi prezentată aici e mult mai simplă decât originalul”.

Surprinzătoare specificare, într-o lucrare care a beneficiat de succes şi de o asemenea audienţă. Sursele ar fi fost accesibile, textul lui Euler fusese scris în franceză, deci nu ar fi trebuit să fie o problemă. Oricât de reuşită ar fi construcţia monumentală a lui Spivak, tocmai aici face o omisiune şi nu discută referinţa originală.

*

În lumea matematicii există un mit, răspândit cumva şi către publicul larg, şi anume că Euler ar fi avut o intuiţie extraordinară şi o inspiraţie fără greş. Adevărul e că Euler a avut multe intuiţii geniale, dar şi situaţii când nu a văzut cea mai scurtă soluţie. Discutarea acestor lucruri e pentru noi o ocazie rară de a vedea cum a funcţionat mintea celui mai prolific autor de matematică originală din toate epocile.

Pentru aşa-numita problemă a dreptei lui Euler, care în vremurile bune ale şcolii româneşti se studia în orele de geometrie la clasa a IX-a, Euler a dat o soluţie laborioasă, pe baza unei metode înrudite cu geometria analitică. E vorba de acea teoremă care spune că intersecţia înălţimilor într-un triunghi, adică ortocentrul, împreună cu centrul de greutate al triunghiului (intersecţia medianelor) şi centrul cercului circumscris (situat la intersecţia mediatoarelor) sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Azi, demonstraţia se poate explica în câteva minute şi se poate scrie în două paragrafe scurte. Rezultatul e atât de fundamental, încât Traian Lalescu l-a inclus la pagina trei a tratatului său *Geometria triunghiului*, scris în 1937. Descoperirea acestei proprietăţi nu a fost însă la vremea ei lucru uşor. Euler s-a gândit la această problemă vreme de 41 de ani, iar demonstraţia pe care a publicat-o în 1765 era calculatorie şi laborioasă. Azi nu ne putem ascunde surprinderea când răsfoim paginile primei demonstraţii. Pe

atunci raţionamentele luau o turnură complicată, ca şi cum orice idee şi-ar fi propus să ruineze sănătatea cuiva până să ajungă la clarificare.

Pentru studentul venit în 1996 de la Bucureşti în Michigan ca să urmeze studiile doctorale, ideea că la finele secolului XX au fost descoperiţi noi invarianţi de curbură a reprezentat o atracţie intelectuală irezistibilă. Gândul că se pot face cercetări fundamentale asupra acestui subiect şi că istoria continuă şi în zilele noastre mi s-a părut un dar pogorât din cer.

1. Lucrarea *Horologium oscillatorium* se poate citi la http://historical. library. cornell.edu/kmoddl/toc_huygens1.html.

2. Vezi A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the explorers*, Springer Verlag, New York, 2007, p. 169.

3. Vezi Knoebel *et al.*, *op. cit.*, p. 176.

4. În original, *circulus osculans*, expresie ce ar putea fi tradusă prin „cerc care sărută”. Această imagine, a cercului care „sărută” curba, era o formă de a spune că cercul respectiv aproximează cel mai bine forma curbei într-un punct dat.

5. Adică ideea intuitivă care apare la Nicole Oresme.

6. Aici Euler nu a intuit bine: ar trebui să fie vorba despre *pătratul* curburii cercurilor mari.

7. Sau: curbura e nulă.

Istoria lui Meusnier

Următorul moment remarcabil în istoria curburii e datorat lui Jean-Baptiste-Marie Charles Meusnier de la Place (1754-1793), un personaj cu un destin neobişnuit pentru un matematician. Nimic nu l-ar fi recomandat pentru cercetarea matematică: nu a mers niciodată la şcoală. A învăţat acasă, de la tatăl său, tot ceea ce ştia. Pe vremea dinastiei Bourbon, singura instituţie unde se putea studia ingineria în Franţa era École Royale du Génie

Militaire, de la Mézières. În perioada 1771-1773, ca să se pregătească pentru această şcoală, Meusnier a luat lecţii particulare la Paris. Momentul apariţiei la Mézières, când avea 21 de ani, a fost consemnat în 1811 de viitorul lui profesor, Gaspard Monge (1746-1818)1, astfel: „În ziua sosirii sale [...] a venit să mă vadă către seară şi şi-a exprimat dorinţa să-i propun o problemă care să mă facă să apreciez cât ştia şi să-i pot judeca aptitudinile. Ca să-l mulţumesc, i-am vorbit despre teoria lui Euler despre raza de curbură minimă şi cea maximă pentru suprafeţele curbe. I-am descris concluziile principale şi i-am propus să încerce să le demonstreze. În dimineaţa următoare, în camerele comune, el mi-a dat o pagină conţinând demonstraţiile, dar, ceea ce era şi mai remarcabil, argumentele pe care le-a folosit erau mai directe decât cele ale lui Euler, iar drumul pe care l-a urmat, mai natural. Eleganţa soluţiilor lui şi scurtul timp de care a avut nevoie ca să le obţină mi-au dat o idee despre perspicacitatea lui şi despre simţul extraordinar asupra naturii lucrurilor care l-au ajutat în studiile pe care le-a făcut mai târziu. I-am arătat volumul Academiei din Berlin care conţinea memoriul lui Euler despre suprafeţe. Şi-a dat seama repede că mijloacele pe care le-a întrebuinţat el erau mai directe decât cele ale modelului său; uneltele sale aveau să fie şi mai fructuoase, pentru că a ajuns la rezultate pe care Euler nu le-a obţinut”.

Oricât de paradoxal ar suna acest lucru, opera matematică a lui Meusnier constă într-o singură lucrare, un memoriu prezentat în faţa Academiei de Ştiinţe din Paris în 1776 şi publicat nouă ani mai târziu2. Această lucrare e singura contribuţie originală în geometria diferenţală în lungul interval dintre lucrările lui Euler şi cele ale lui Gauss3. Meusnier este cel care a introdus aşa-numita formă a doua fundamentală, pe care ne-o putem reprezenta ca pe o matrice pătratică, de dimensiune doi pe doi, care este expresia felului cum „stă” suprafaţa în spaţiul ei ambient tridimensional. Mai bine spus, matricea aceasta marchează urma pe care orice suprafaţă o lasă în

spaţiul în care se află. Cu ajutorul ei, Meusnier a obţinut formule explicite pentru razele de curbură, iar aceste formule aveau să joace un rol esenţial în studiul membranelor supuse vibraţiei. Teorema care azi poartă numele lui Meusnier afirmă că toate curbele care trec printr-un punct dat de pe o suprafaţă şi care au aceeaşi tangentă în acel punct trebuie să aibă aceeaşi curbură normală4. Mai mult, în acelaşi studiu, Meusnier a descoperit că elicoidul este o suprafaţă minimală. Euler descoperise în 1744 că şi catenoidul satisface proprietatea de minimalitate.

Pe baza acelui memoriu, Meusnier a fost primit ca membru corespondent în Academie. Truesdell, biograful lui Meusnier, se întreabă: „Ne putem noi oare imagina azi un om ales în Academia Naţională numai pe baza unei lucrări nepublicate, şi aceasta într-un domeniu «esoteric» tratat numai o singură dată în literatură? Ne putem noi oare imagina acest om finanţat la nivel profesional?”. Într-adevăr, pe vremea aceea Academia le oferea membrilor ei salarii, fără niciun fel de obligaţii didactice. Îndatoririle lor ţineau mai degrabă de ceea ce astăzi fac referenţii. Meusnier avea să devină membru plin al Academiei la 29 de ani5 şi nu avea să mai scrie nimic în domeniul care l-a consacrat. Avea să facă în schimb o carieră spectaculoasă în armata lui Napoleon, unde în 1792 a devenit mareşal. Câteva luni mai târziu a fost rănit la Kassel, în timpul asediului de la Mainz. După o agonie de şapte zile, a murit. A avut parte de o înmormântare de erou la Paris. Astăzi, e amintit în fiecare curs de geometrie diferenţială atunci când se studiază curbura curbelor situate pe suprafeţe oarecare.

Am auzit prima oară de el în toamna anului 1990, atunci când am urmat la Universitatea din Bucureşti cursul de geometrie diferenţială pentru anul II. Aveam să aflu despre povestea întâlnirii lui cu profesorul Monge mult mai târziu.

1. Monge e un nume celebru în matematică. Azi,

importante ecuaţii îi poartă numele.

2. „Mémoire sur la curbure des surfaces”, în *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l’Académie Royale des Sciences, par Divers Savants, et lus dans ses Assemblées*, Paris, 10 (1785), 477-510.

3. Această remarcă, precum şi datele biografice despre Meusnier provin din lucrarea lui Clifford Truesdell intitulată „Jean-Baptiste-Marie Charles Meusnier de la Place (1754-1793): an historical note”, apărută în *Meccanica*, 31 (1996), 607-610.

4. Studiul curburii poate fi rafinat descompunând curbura în alte două funcţii: curbura geodezică şi curbura normală.

5. Cauchy a devenit membru plin al Academiei Franceze la 27 de ani, iar Clairault la 16!

Sophie Germain

Dacă cineva m-ar întreba care a fost autoarea care m-a impresionat cel mai mult, aş răspunde fără ezitare că e vorba de Sophie Germain (1776-1831). Interesul meu pentru scrierile ei are o motivaţie personală: îi datorez ceva. Ea a inventat curbura medie şi a studiat-o prima oară într-un text care azi ni se pare a fi fost scris cu o generaţie înaintea epocii sale. Când am aflat mai multe despre Sophie Germain, am descoperit o personalitate fascinantă. Atât ca matematician, cât şi ca eseist, impresionează nu doar prin forţa imaginaţiei, ci şi prin eleganţa stilului, într-o combinaţie neaşteptată de rigoare, virtuozitate şi delicateţe. Memoriul ei dedicat studiului curburii, scris într-o primă versiune în 1816, atunci când autoarea l-a trimis pentru a fi considerat pentru un premiu, a văzut lumina tiparului abia în 1831, anul în care, din nefericire, ea s-a stins.

Sophie s-a născut la Paris, pe strada Saint-Dénis; a fost fiica unui viitor membru al Adunării Constituante de după Revoluţie. Pentru ea, prima sursă de informaţie ştiinţifică a fost biblioteca tatălui, unde în adolescenţă a citit, între multe altele, despre Arhimede, Aristotel şi

întreaga lume ştiinţifică din vechime. Părinţii ei n-au fost prea fericiţi atunci când au aflat de interesul ei pentru matematică şi au făcut tot ce se putea pentru a o descuraja să mai studieze. Sophie a găsit o soluţie: a continuat să citească matematică noaptea.

Când Sophie avea 18 ani, în vremea Revoluţiei, în 1794, s-a creat Şcoala Politehnică din Paris, unde au predat cei mai importanţi matematiceni ai momentului. Pe vremea aceea femeile nu puteau să urmeze şcoala acolo, dar Sophie a reuşit să obţină notele de curs, pe care le-a studiat. La finele anului u niversitar a scris un memoriu, pe care l-a transmis profesorului Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Textul respectiv a constituit o surpriză pentru Lagrange, care şi-a dorit să-l cunoască pe autor, iar surpriza avea să-i fie şi mai mare: era o domnişoară. Acesta este contextul în care Lagrange a început să o îndrume şi să o prezinte altor matematicieni ai momentului. Din 1804 a existat o corespondenţă între Sophie Germain şi Gauss, aşa că putem spune că ea s-a bucurat de îndrumarea celor mai avizate opinii ale vremii ei. Şi avea ce-i scrie lui Gauss: Sophie obţinuse rezultate substanţiale în teoria numerelor. În cercul de matematicieni ai vremii, Sophie a aflat de textele din domeniul geometriei diferenţiale ale lui Euler şi Meusnier, cei doi autori care au lăsat cele mai importante contribuţii în studiul suprafeţelor la finele secolului al XVIII-lea. I-a studiat pe amândoi, şi acest efort avea să o conducă la descoperirea ei din domeniul geometriei pe care-l aminteam mai sus.

Memoriul din 1831 începe astfel (şi primul paragraf merită reamintit aici, ca măsură a stilului ei rafinat, diferit de al altor autori care au lucrat în acest domeniu auster): „Ne propunem să semnalăm şi să definim un tip de cantităţi a căror existenţă nu părea să fi fost bănuită; şi, tratând o problemă care părea epuizată, vom fi obligaţi să recurgem la distincţii care nu au mai fost folosite, la noţiuni singulare în aparenţă. Fără îndoială, ne-am putea teme că astfel de cercetări care nu se bucură nici de girul

unui nume celebru, nici, în ciuda tuturor eforturilor mele, de cadrul unei prezentări strălucite ar putea fi primite cu reţinere; în acelaşi timp, cel mai mic grăunte de atenţie ar fi suficient pentru a recunoaşte că aceste distincţii sunt fundamentate şi că aceste noţiuni rezultă din punctul de vedere sub care curbura suprafeţelor apare în anumite probleme” 1.

Şi la aproape două veacuri distanţă ne putem da seama: a avut dreptate până la ultima nuanţă. A analizat problema până a ajuns la esenţa fenomenului fizic, pe care l-a condus la enunţul matematic cel mai general, atât cât i-a permis paradigma momentului. Ca să explicăm problema la care s-a gândit Sophie Germain, vom recurge la o imagine familiară nouă. Să ne imaginăm că parbrizul unei maşini e lovit, în partea curbată, de o piatră, în plină viteză. Să presupunem că avem de-a face cu un parbriz de grosime constantă, realizat dintr-un material omogen, curbat pentru a se potrivi mai bine formei maşinii. În urma impactului, crăpăturile sunt dispuse radial. Cu toate acestea, la o examinare atentă, vom observa că nu toate crăpăturile sunt egale, unele dintre ele sunt mai pronunţate, mai lungi sau mai adânci. Ei bine: în ce direcţie are loc cea mai amplă crăpătură şi de ce? Care e legătura între distribuirea tensiunii şi curbură? Cum anume se distribuie forţele dacă geamul este lovit frontal de o anumită forţă? Astfel de fenomene au interesat-o pe Sophie Germain. Şi, ca să studieze astfel de fenomene, a imaginat, descris şi studiat o mărime care nu mai fusese pusă în evidenţă până la ea: curbura medie.

Din nefericire, Sophie Germain nu avea să afle audienţa pe care memoriul ei o va avea printre geometri. S-a stins pe 27 iunie 1831. Cu puţin înainte de moartea ei, Gauss determinase Universitatea din Göttingen să îi confere un grad onorific, pe care ea îl merita cu prisosinţă…

O altă comparaţie se impune. Aforismele scrise de Sophie Germain ne amintesc de Cioran. Ea scrie: „Nu ne deranjează nici multul, nici puţinul, şi nici privaţiunea, ci

comparaţia. Nu suntem săraci decât alături de cei bogaţi” 2.

Şi încă „Simplitatea nu este în mod esenţial un principiu, o axiomă, ci rezultatul muncii: nu este o idee a copilăriei omenirii, ci aparţine maturităţii oamenilor. Cel mai mare adevăr e că observaţia constantă aderă la iluzia efectelor: poate că acesta nu-i decât un rest al ştiinţei primitive”.

Sau încă o formulare extraordinară despre felul cum trebuie studiate fenomenele matematice, dar care admite fireşti extensii şi în alte domenii: „Superioritatea constă în mijlocul de a considera lucrurile dificile dintr-un punct de vedere din care ne devin facile, de unde spiritul le poate cuprinde şi urmări fără efort”. Un astfel de enunţ din partea cuiva care chiar a descoperit asemenea concepte e plin de substanţă şi ne sugerează că centrul de greutate al cercetării e mai degrabă în sfera reflecţiei decât pe teritoriul calculelor brute.

Dar partea cea mai interesantă a însemnărilor ei mi se pare a fi următoarea:

„Un géomètre est un homme qui entreprend de trouver la vérité, et cette recherche est toujours pénible dans les sciences comme dans la morale. Profondeur de vue, justesse de jugement, imagination vive, voilà les qualités du géomètre. Profondeur de vue pour apercevoir toutes les conséquences d’un principe, cette immense postérité d’un même père. Justesse de jugement, pour distinguer entre elles les traits de famille, et pour remonter de ces conséquences isolées au principe dont elles dépendent. Mais ce qui donne cette profondeur, ce qui exerce ce jugement, c’est l’imagination, non celle qui se joue à la surface des choses, qui les anime de ses couleurs, qui y répand l’éclat, la vie et le mouvement, mais une imagination qui agit au dedans des corps comme celle-ci au dehors. Elle se peint leur constitution intime, elle la change et la dépouille à volonté; elle fait, pour ainsi dire, l’anatomie des choses et ne leur laisse que les organes des

effets qu’elle veut expliquer. L’une accumule pour embellir, l’autre divise pour connaître. L’imagination qui pénètre ainsi la nature, vaut bien celle qui tente de la parer. Moins brillante que l’enchanteresse qui nous amuse, elle a autant de puissance et plus de fidélité. Quand l’imagination a tout montré, les difficultés et les moyens, le géomètre peut aller en avant; et s’il est parti d’un principe incontestable, qui rende sa solution certaine, on lui reconnait un esprit sage. Ce principe le plus simple offre-t-il la voie la plus courte, il à l’élégance de son art. Et enfin il a du génie, s’il atteint une vérité grande, utile et longtemps déparée des vérités connues” 3.

11. Sophie Germain, „Mémoire sur la courbure des surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1831, 1-29.

2. *Œuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites*, Elibron Classics, facsimil integral al ediţiei originale publicate în 1879 de Paul Ritti, Paris.

3. „Un geometru e un om care-şi propune să găsească adevărul, iar această căutare e întotdeauna dureroasă în ştiinţe, ca şi în morală. Profunzime a viziunii, justeţe a judecăţii, imaginaţie vie, acestea sunt calităţile geometrului. Profunzime a viziunii pentru a percepe toate consecinţele unui principiu, această amplă posteritate a unui părinte comun. Justeţe a judecăţii, pentru a distinge între ele trăsăturile de familie şi pentru a merge dinspre aceste consecinţe izolate către principiul de care ele depind. Dar ceea ce dă această profunzime, ceea ce antrenează această judecată este imaginaţia, nu cea care se joacă la suprafaţa lucrurilor, care le animă cu culorile ei, care răspândeşte acolo strălucirea, viaţa şi mişcarea, ci o imaginaţie care acţionează înlăuntrul corpurilor precum cealaltă în exterior. Ea îşi reprezintă structura lor intimă, o schimbă şi o desface după voia ei; ea face, ca să spunem aşa, anatomia lucrurilor şi nu le lasă decât organele consecinţelor pe care vrea să le explice. Una acumulează

pentru a înfrumuseţa, cealaltă desface pentru a cunoaşte. Imaginaţia care pătrunde astfel natura preţuieşte tot atât cât cea care încearcă să o împodobească. Mai puţin strălucitoare decât vrăjitoarea care ne amuză, ea are la fel de multă putere şi mai multă loialitate. Când imaginaţia a arătat totul, dificultăţile şi mijloacele, geometrul poate să meargă mai departe; şi dacă a plecat de la un principiu incontestabil, care să facă soluţia lui sigură, i se recunoaşte o minte înţeleaptă. Acest cel mai simplu principiu oferă calea cea mai scurtă, conţine eleganţa artei sale. Şi, în fine, el are geniu dacă ajunge la un adevăr major, util şi multă vreme ocultat de adevărurile cunoscute”.

Despre curbură (partea întâi)

În anii când Meusnier îşi scria celebrul memoriu, se năştea în ducatul Braunschweig Johann Carl Friedrich Gauss. Principala lecţie pe care tatăl avea să i-o transmită micului Carl e că munca fizică aduce pâinea cea de toate zilele. Tatăl credea într-o astfel de muncă şi aşa a trăit toată viaţa. E paradoxal că dintr-un astfel de mediu familial se va ivi primul matematician profesionist al vremurilor moderne. Gauss era atât de înzestrat, încât deşi pe atunci nu existau poziţii universitare de cercetare, în care cercetătorii să fie plătiţi pentru informaţia pe care o creează, istoria vremii lui avea să-i inventeze un rol în care el îşi va manifesta strălucirea.

E bine cunoscută anecdota cu micul Carl care, atunci când primeşte la şcoală sarcina meticuloasă de a aduna toate numerele de la 1 la 100, rezolvă problema în câteva clipe observând că e vorba despre 50 de perechi care au fiecare suma 101. Întrucât calităţile lui intelectuale erau neobişnuite, profesorii lui, Büttner şi Bartels, l-au recomandat pentru o bursă ducelui de Braunschweig-Wolfenbüttel, iar sprijinul financiar pe care ducele i l-a acordat lui Gauss îl va face pe acesta să fie recunoscător toată viaţa. Pe termen lung, modelul politic al ducatului îi va influenţa lui Gauss viziunea politică; acesta avea să

devină un adept al acelor monarhii luminate administrate în stilul pe care-l văzuse în copilărie şi adolescenţă sub administraţia ducelui.

În 1795, când asupra subiectului geometriei diferenţiale domnea liniştea dinaintea furtunii, Gauss a părăsit Braunschweigul natal pentru a studia la Universitatea din Göttingen, unde a urmat cursurile lui Abraham Kästner, care nu a izbutit să-l înveţe prea multe, dar, după cum Gauss a dat de înţeles, a reuşit să-l enerveze. Tot acolo s-a împrietenit cu Farkas Bolyai, prin una dintre acele miraculoase conexiuni ale destinului: fiecare dintre ei avea să joace un rol important în clarificarea controversatei chestiuni a postulatului paralelelor. Reputaţia lui Gauss avea să cunoască o traiectorie ascendentă, în special după ce, în anul 1801, i-a apărut *Disquisitiones Arithmeticae*, acolo unde a adus numeroase contribuţii în algebră, în teoria numerelor în particular.

În 1818, Gauss a acceptat sarcina meticuloasă de a completa planul de geodezie al statului Hanovrei. Purtând pe cap o scufie de mătase vişinie, Gauss a făcut şi muncă de teren, şi studiu aplicat, şi măsurători, pe un teren dificil, acoperit de păduri, printre dealuri. Cum să măsori cu precizie un vast teritoriu atunci când este vorba despre o zonă împădurită, cu vizibilitate redusă, cu instrumente oarecum rudimentare, atunci când nu existau nici sateliţi, nici telecomunicaţii, nici transmisii radio care să permită sincronizarea unei echipe de lucru pe teren? Cu toate acestea, Gauss a reuşit să-şi îndeplinească sarcina din domeniul cartografiei.

Din acest studiu de teren aveau să se nască reflecţiile care au condus la o contribuţie teoretică extraordinară inclusă în lucrarea publicată în 1827, initulată *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[1]. În această lucrare, Gauss introduce o definiţie a curburii unei suprafeţe într-un punct dat.

Fără nicio aspiraţie la rigoare în cele ce urmează, vom descrie aici ideea primei definiţii date de Gauss astfel.

Să considerăm acum o suprafaţă fără colţuri (de exemplu, conturul unui deal lipsit de stânci) şi un punct oarecare pe ea. Ne propunem să definim curbura în acel punct. Să ne imaginăm că razele soarelui coboară pe verticala locului. Să ne imaginăm că avem un mic paralelogram care se sprijină pe respectiva suprafaţă doar într-un colţ, în acel plan perpendicular pe verticala locului. Şi acum, cu multă grijă, să măsurăm aria *umbrei* pe care paralelogramul o lasă pe suprafaţă. Apoi calculăm raportul dintre această arie a umbrei şi aria paralelogramului. Atunci când începem să restrângem paralelogramul, făcându-l tot mai mic, acel raport va avea ca limită o cantitate pe care Gauss a definit-o drept curbură a suprafeţei.

Ideea e extraordinară: nici Euler, nici Monge sau Meusnier nu s-au gândit la ea. Cantitatea respectivă a fost în schimb studiată de Olinde Rodrigues (1794-1851), un student al lui Monge de la École Polytechnique, într-o lucrare scrisă în 18152.

Dar Gauss nu se opreşte aici. Ne amintim de studiul lui Euler privind distribuţia curburii liniare, adică a curburii acelor curbe date de intersecţiile dintre o suprafaţă şi planele perpendiculare pe suprafaţă trecând prin punctul dat. Euler a arătat că aceste curburi pot lua orice valori între o valoare minimă *k1* şi o valoare maximă *k2.* Vom numi aceste două valori extreme *curburi principale* ale suprafeţei.

Gauss a demonstrat că acea curbură a suprafeţei, aşa cum am prezentat-o în definiţia de mai sus, este egală cu produsul dintre *k1* şi *k2.* Aşadar, curbura gaussiană a suprafeţei într-un punct dat e produsul curburilor principale. Multe manuale de geometrie diferenţială preferă să pornească de la această proprietate, în chip de definiţie a curburii, şi să obţină celelalte înfăţişări ale curburii drept consecinţe.

Astfel, curbura unei sfere este pătratul curburii ecuatorului ei. Curbura unui cilindru circular va fi zero, pentru că avem de calculat produsul dintre curbura unui cerc şi cea a unei drepte, generatoarea cilindrului, iar

dreapta are curbura zero. Din pricina aceasta cilindrul este *plat* (în contextul studiului curburii, „plat” înseamnă că are curbura nulă în fiecare punct al suprafeţei). Intuiţia noastră susţine foarte bine imaginea aceasta: dacă decupăm cilindrul de-a lungul unei generatoare, îl putem desfăşura pe masă fără nicio deformare. Dacă Pământul ar fi cilindric, în loc să fie sferic, n-am avea nicio problemă să realizăm hărţi de perfectă acurateţe şi să le desfăşurăm pe masă fără a deforma realitatea reprezentată.

În fine, studiul lui Gauss mai include un rezultat surprinzător. Dacă desfăşurăm fără deformare o suprafaţă pe o altă suprafaţă (harta Hanovrei pe masa ducelui), atunci curbura suprafeţei originale nu se schimbă. O coajă de portocală nu se poate întinde „plat” pe masă. Sau, spus în limbaj matematic, curbura rămâne neschimbată la transformări rigide. Cu alte cuvinte, ca să desenăm o hartă exactă ar trebui să proiectăm un fragment de sferă (Pământul!) pe o bucată de plan (masa). Şi asta e tot ce putem face, câtă vreme ne propunem să citim hărţile pe o reprezentare planară. Pentru o hartă ideală, am avea nevoie de o reprezentare sferică.

Problema cartografiei îl preocupase înainte şi pe Euler. Între lucrările care au rămas de la el, din perioada când se afla la St. Petersburg, se numără şi una în care studiază o problemă de proiecţie: cum anume să se reprezinte cel mai bine harta Imperiului Rus.

Gauss avea să numească rezultatul care se referă la curbura ce rămâne neschimbată la transformări rigide *teorema remarcabilă* (în original, în latină: *egregium*).

*

Una dintre cele mai interesante reflecţii asupra ideii de curbură a aparţinut Sophiei Germain (1776-1831).

Pentru istoria ideii de curbură, contribuţia Sophiei Germain a fost de o importanţă crucială. Memoriul ei publicat în 1831 include următorul pasaj, care conţine motivaţia problemei: „Întrucât curbura e comparată cantităţilor dinamice, nu putem disimula faptul că ea e în mod tacit tratată ca o cantitate de acelaşi fel. Suprafeţele

nu mai sunt deci considerate doar în raport cu ele înseşi, şi nu e vorba doar de proprietăţile lor particulare, nici de cele care sunt comune unei clase dintre ele. E nevoie aşadar să se definească acea cantitate dinamică născută din curbură. Dar această cantitate nu depinde de figura suprafeţelor, ci de o condiţie care e satisfăcută de un număr infinit de suprafeţe diferenţiale. De aici se nasc distincţiile necesare, dar a căror folosinţă nu a fost consacrată încă; sunt noţiuni simple, dar care n-au fost niciodată exprimate efectiv. Dacă, de la începutul acestui memoriu, am fi fost obligaţi să explicăm atât aceste noţiuni, cât şi distincţiile care le fac indispensabile, sarcina ne-ar fi fost extrem de dificilă. Prin ordinea firească a ideilor, ne găsim într-o situaţie mult mai favorabilă.

E convenabil să examinăm pentru început care sunt curburile liniare datorate intersecţiilor planelor duse prin unul dintre punctele suprafeţei; iar cercetările pe care Euler ni le-a lăsat oferă, în această privinţă, ajutorul pe care l-am putea dori".

În prima secţiune a lucrării ei, Sophie Germain reaminteşte rezultatele lui Euler pe care îşi va baza discuţia. Partea interesantă urmează abia mai apoi, acolo unde, aşa cum scrie ea, „vom expune câteva considerente noi asupra curburii suprafeţelor. Studiul felului cum este dispusă curbura va scoate în evidenţă numaidecât existenţa unei cantităţi medii dependente de curbură, dar comună unui număr infinit de suprafeţe de figuri diferite.

Cititorul va vedea că în problemele de natură dinamică, unde curbura e luată în considerare, dacă în timp ce suma forţelor născute din această curbură e independentă de figura suprafeţei, dimpotrivă – repartizarea aceloraşi forţe în jurul punctului dat depinde de această figură; astfel încât legea de repartizare a curburii curbelor în jurul unui punct fixat pe suprafaţă ne dă o corespondenţă deplină cu ceea ce se ştie despre compoziţia forţelor care acţionează în jurul acestui punct".

Partea surprinzătoare a descoperirii făcute de Sophie Germain este enunţată în prima ei Propoziţie (nu a numit-o

teoremă, probabil din aceeaşi modestie care transpare de-a lungul întregului text), al cărei enunţ este următorul: „Oricare ar fi poziţia a două plane normale, perpendiculare între ele, duse printr-un punct dat al unei suprafeţe oarecare, suma curburilor conţinute în aceste două plane va fi întotdeauna aceeaşi. Ca urmare, această sumă va fi egală cu cea a curburilor principale”.

Din acest motiv, inspirat mai degrabă din considerente de natură fizică, Sophie Germain propune pentru termenul de curbură „media aritmetică a acestor aşa-numite curburi principale”. Mai precis, dacă ne amintim că valorile *k1* şi *k2* desemnau minima şi maxima curburilor secţiunilor normale printr-un punct dat, Sophie Germain propune spre studiu cantitatea (*k1* + *k2*) / 2. Mai mult, stabileşte în memoriul ei cum anume se distribuie curburile în jurul unui punct pe o suprafaţă. Rezultatul ei este următorul: „Există, în general, în jurul unui punct dat, patru direcţii după care curbele conţinute în planele normale sunt similare. În ceea ce priveşte planele principale, numărul curburilor similare se reduce la două”.

În fine, asta ne permite să vedem cum arată aşa-numitele sfere de curbură. E vorba despre acele sfere care ar aproxima cel mai bine suprafaţa studiată într-un punct dat. Ne-am dori să avem o imagine la fel de intuitivă ca şi figura pe care am obţinut-o atunci când am descris cercul de curbură (sau, cum a preferat Leibniz să-l numească, cercul osculator). Abia dacă am avea această interpretare am simţi că am făcut, odată cu acest memoriu, un pas mai departe faţă de ceea ce ştiam de la Leonhard Euler. Iată şi interpretarea, care nu lipseşte din memoriul publicat de Sophie Germain: „E evident, în fapt, că fiecare dintre curburile principale găsindu-se numai de două ori în conturul întreg al punctului dat şi fiind prin urmare conţinute în prelungirea unuia şi aceluiaşi plan, sferele descrise de aceste raze ating, dar nu taie suprafaţa; în timp ce, reciproc, sferele descrise de razele de valori cuprinse între aceste limite [date de inversele valorilor principale] taie suprafaţa”.

*

Să considerăm o suprafaţă în spaţiul tridimensional obişnuit. Am văzut că teorema remarcabilă a lui Gauss stabilise faptul că transformările rigide nu schimbă curbura gaussiană. Aşadar, putem spune că există mărimi geometrice care ţin de geometria suprafeţei, iar nu de cea a spaţiului ambient, şi curbura gaussiană este una dintre ele. Mărimile geometrice care sunt aduse pe suprafaţă din geometria spaţiului exterior nu ţin de geometria intrinsecă a suprafeţei. Terminologia numeşte aceste două categorii de cantităţi *mărimi intrinseci*, respectiv *extrinseci.* Astfel, curbura gaussiană este intrinsecă, dar curbura medie este extrinsecă. Nu ne propunem să includem aici argumentul tehnic, dar vom face referinţă mai departe la acest lucru, în capitolul intitulat „Despre curbură (partea a doua)”.

*

Ne putem imagina spectrul culorilor dispus liniar pe paleta unui pictor, de la stânga la dreapta. Să ne imaginăm culorile aranjate de la cele reci la cele calde. Acum, să ne imaginăm că vrem să reprezentăm obiectele care ne înconjoară într-un grafic care să includă cele două variabile: locul unde se află şi culoarea. De câte dimensiuni avem nevoie ca să reprezentăm asta? Cel puţin de patru. Da, dar noi nu avem la dispoziţie decât trei axe de coordonate ca să reprezentăm orice suprafaţă din spaţiul care ne înconjoară.

Acesta e doar un exemplu de situaţie în care dimensiunile de care avem nevoie pentru a reprezenta complet un fenomen sunt mai multe decât trei. A ne mărgini în studiul geometriei doar la trei dimensiuni ar fi o pierdere. Pentru un studiu complet, avem nevoie să înţelegem toate aceste concepte în dimensiune mai mare decât unu, doi sau trei.

Acest argument, despre reprezentarea spaţiului şi a culorilor, se află în lucrarea lui Riemann3 din 1854 intitulată *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Asupra ipotezelor care se află la baza geometriei*), care a văzut lumina tiparului abia în anul

prematurei morţi a autorului ei, 1866. Practic, această lucrare este actul de naştere al geometriei diferenţiale moderne, cea care avea să constituie suportul teoretic al dezvoltărilor ce au condus atât spre teoria relativităţii, cât şi spre alte aplicaţii semnificative în tehnologia contemporană.

Bernhard Riemann (1826-1866) a avut nu doar norocul unei inteligenţe neobişnuite, dar şi pe cel al unei educaţii bine îndrumate. Pare surprinzător că pe atunci Universitatea din Göttingen nu era atât de performantă cum avea să devină câteva decenii mai târziu, la finele secolului al XIX-lea. Gauss preda cursuri elementare şi nu se ştie cum au interacţionat cei doi la prima lor întâlnire, cu prilejul unui curs elementar. Riemann avea să se mute la Berlin în 1847, unde a studiat, între alţii, cu Dirichlet, Eisenstein, Jacobi şi Steiner. Şi-a obţinut doctoratul în 1851, iar în 1854 a susţinut conferinţa *Asupra ipotezelor care se află la baza geometriei*, într-un moment important din cariera lui universitară, atunci când aspira la rangul de *Privatdozent*. Acest rang desemna pe atunci un profesor care nu primeşte salariu fix, fiind plătit din taxele acelor studenţi care îi urmează cursul. În această conferinţă, Riemann a introdus, între altele, două concepte importante: cel de *varietate* şi cel de *curbură secţională*. Nu e nicio exagerare în a spune că ideea de varietate este, de departe, cea mai importantă dintre cele cu ajutorul cărora reprezentăm în geometrie spaţiul.

Să ne imaginăm reprezentarea grafică, în patru dimensiuni, a obiectelor din camera noastră, fiecare determinată de cele trei coordonate ale poziţiei şi de culoare. Acest spaţiu, cu mai multe dimensiuni, poate fi înzestrat cu o distanţă, pe care Riemann o descrie ca obţinută dintr-o generalizare a teoremei lui Pitagora în mai multe dimensiuni. Cu această convenţie, putem preciza care e distanţa dintre două puncte situate într-un spaţiu de dimensiune arbitrară, nu neapărat 4, ci, să zicem, n. Astfel, spaţiul cu n dimensiuni se organizează într-o formă nouă, în care putem calcula distanţa şi drumul cel mai scurt care

duce de la un punct la altul, dacă un astfel de drum există. Această idee a lui Riemann avea să fie reexaminată şi completată mai târziu de viitoarele generaţii de matematicieni; definiţia contemporană a varietăţii (aşa cum se numeşte acest spaţiu cu *n* dimeniuni) este formală şi nu ne propunem să o prezentăm aici, unde vrem să punem accent doar pe aspectul intuitiv. Dar ideea originală se află la Riemann: după contribuţia sa, geometria va avea la dispoziţie un spaţiu multidimensional, dotat cu o distanţă dată de o formulă generală, pe care multe dintre conceptele puse în evidenţă pe suprafeţe pot fi extinse şi studiate în mod natural.

Cum putem să ne reprezentăm acest spaţiu? Pentru început, ni-l vom desena în minte la fel cum desenăm şi suprafeţele. Nimic complicat: vedem un covor zburător unduindu-se în mijlocul camerei şi ne imaginăm că pentru o clipă „îngheţăm" imaginea. Asta e tot ce avem nevoie pentru intuiţia noastră. Cu importanta adăugire că e vorba de un covor de dimensiune *n*, iar *n* nu este neapărat 2.

Cât despre curbură, să observăm că acest covor va avea în fiecare punct, în loc de un plan tangent, un spaţiu tangent, un întreg spaţiu care la rândul lui are dimensiunea *n.* Analogia e firească: întrucât suprafaţa are dimensiunea 2, planul tangent într-un punct are dimensiunea 2; la fel, pentru o varietate de dimensiune *n*, spaţiul tangent într-un punct la varietate va avea tot dimensiunea *n.* În cadrul acestui spaţiu se află conţinute multe plane. În loc de mai vechea curbură gaussiană de pe suprafeţe, cea definită prin produsul celor două curburi principale, vom vorbi acum despre *curbura secţională* a unui astfel de plan. Şi vom conveni că valoarea acestei curburi secţionale trebuie să coincidă cu valoarea curburii definite de Gauss pentru acea suprafaţă inclusă în varietate care are planul dat ca plan tangent. Iată cum descrie Riemann acest proces (simplificăm puţin terminologia):

„Pentru a da un înţeles tangibil curburii unei varietăţi

într-un punct dat şi într-o direcţie planară trecând prin el, vom menţiona că o cea mai scurtă curbă (sic!) emanând dintr-un punct e complet determinată dacă direcţia iniţială este dată. Ca urmare, vom obţine o suprafaţă dacă prelungim toate direcţiile iniţiale din punctul dat care sunt tangente la planul ales. Şi această suprafaţă are o curbură precizată în punctul dat, care e egală cu curbura varietăţii la punctul dat, în direcţia planară aleasă” 4.

Altfel spus, curbura secţională în direcţia planară *p* este egală cu curbura gaussiană a suprafeţei căreia planul *p* i-ar fi plan tangent.

*

Privită de la mai bine de un veac şi jumătate depărtare, contribuţia lui Riemann ni se pare firească, apărută în mod natural, o continuare logică a eforturilor depuse de Rodrigues, Gauss sau Sophie Germain. Dar la vremea respectivă Riemann a avut de înfruntat o oarecare tensiune în mediul academic al vremii sale. Ca să descrie felul cum intuiţia noastră ar trebui să perceapă aceste spaţii foarte generale, el nu polemizează cu filosofii epocii lui sau ai generaţiilor precedente, ci alege o cale diplomatică. Va scrie că problema geometriei este de a „căuta cele mai simple date din care relaţiile metrice ale spaţiului să fie determinate”. Iar mai departe precizează că „aceste date sunt, ca orice date, nu necesare, ci doar ipoteze, care se bazează pe o certitudine empirică”. Nu merge mai departe cu aceste consideraţii. Nu caută polemica.

Or, acest punct de vedere este divergent faţă de cel prezentat de Immanuel Kant (1724-1804) în *Critica raţiunii pure*, apărută în 1781. Pentru Kant, geometria euclidiană, lumea plată a planului sau a spaţiului cu trei dimensiuni, lipsit de curbură, era o necesitate filosofică. Kant scrie că „spaţiul nu este o concepţie care a fost obţinută din experienţe exterioare”. Mai mult, „reprezentarea spaţiului trebuie să existe deja ca fundaţie”. Nici vorbă aşadar de posibilitatea unor reprezentări abstracte ale unor spaţii cu *n* dimensiuni, în

care să poată fi extins conceptul de distanţă sau cel de curbură gaussiană. Mai departe, Kant spune şi că „reprezentarea spaţiului nu poate fi împrumutată din relaţii ale unor fenomene exterioare prin experienţă” 5.

Aşadar, existau puncte de vedere importante în filosofia vremii care nu doar că nu anticipaseră deloc această dezvoltare, dar nici nu păreau pregătite să-i netezească intrarea în scenă. După contribuţia lui Riemann însă, ideea de curbură a căpătat o formă generală, iar studiul ei a generat geometria riemanniană, care de mai bine de un secol şi jumătate este un interesant domeniu de cercetare.

În toamna lui 2001, atunci când mă pregăteam să particip la prima conferinţă internaţională unde plănuiam să vorbesc despre noi invarianţi de curbură6, am avut o discuţie cu profesorul David Blair. I-am cerut sfatul asupra unor detalii legate de prezentarea mea. Eram la el în birou, la o oră a după-amiezei când seminarele de geometrie se terminaseră. L-am întrebat cum se poate explica cel mai bine într-un mod cât mai intuitiv ce este curbura secţională. A zâmbit şi mi-a sugerat explicaţia iniţială, cea moştenită de la Riemann. Am folosit explicaţia aceasta de mai multe ori, chiar şi în situaţii când am prezentat astfel de idei unui public în rândurile căruia nu se afla nimeni familiarizat cu geometria diferenţială.

1. Versiunea românească poate fi găsită pe pagina web a profesorului Liviu Ornea, la http://gta. math. unibuc.ro/pages/teachlee.html.

2. Dar Rodrigues nu a demonstrat că acel raport este neschimbat la transformări rigide ale suprafeţei. Fără acest pas nu se poate vorbi despre o bună înţelegere a curburii unei suprafeţe.

3. Pentru o versiune românească a acestui text important, vezi aceeaşi pagină a lui Liviu Ornea la care am făcut trimitere şi mai înainte: http://gta. math. unibuc.ro/pages/teachlee.html.

4. Am preluat traducerea acestui fragment de la Liviu

Ornea.

5. O discuţie mai detaliată decât cea pe care ne-o propunem aici poate fi găsită în Jeremy Gray, *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008, pp. 78-83.

6. Avea să fie la Toronto, pe 9 decembrie 2001.

Gheorghe Ţiţeica

În toamna lui 1896, când Gheorghe Ţiţeica avea doar 23 de ani, a ajuns la Paris cu o bursă românească de merit, iar întâlnirea lui cu Gaston Darboux trebuie să fi fost acel eveniment unic care poate schimba o viaţă. Programul de doctorat al lui Ţiţeica avea să dureze trei ani şi să se desfăşoare sub îndrumarea lui Darboux, ale cărui lucrări la ora aceea se bucurau de recunoaştere internaţională. Gaston Darboux a fost geometru, a îndeplinit între altele şi funcţia de decan al Facultăţii de Ştiinţe şi, între multe alte contribuţii, a scris o lucrare în patru volume intitulată *Théorie générale des surfaces*, al cărei ultim volum abia venise de la tipar în toamna când Ţiţeica a ajuns la Paris. Pentru multă vreme, tratatul lui Darboux a fost una dintre referinţele principale în domeniul geometriei. Pentru tânărul student român trebuie să fi fost o descoperire de graţie. Îi era clar că se află în centrul universitar al lumii, în laboratorul în care se nasc ideile cele mai temerare ale momentului.

Din perioada aceea circulă despre Darboux mai multe istorii. Se spune1 că topologul danez Poul Heegaard (1871-1948) a venit în vizită la Paris, după ce a absolvit facultatea la Universitatea din Copenhaga în 1893, înarmat cu o scrisoare de prezentare către Darboux. Heegaard a aşteptat în anticameră vreme de patruzeci şi cinci de minute, după care secretara i-a comunicat că domnul profesor Darboux a mototolit scrisoarea de recomandare şi a aruncat-o direct în coşul de gunoi. Astfel, aşteptarea nu mai avea sens: oaspetele danez a plecat fără a schimba niciun cuvânt cu Darboux. Heegaard a avut parte de o primire mult mai binevoitoare din partea lui Felix Klein în

Germania, iar peste câţiva ani avea să confirme, producând rezultate de interes în topologie.

Simplul fapt de a fi fost acceptat şi confirmat în cercul studenţilor lui Darboux era o performanţă în sine. Teza lui Ţiţeica nu a fost decât un prim pas într-o carieră de maximă creativitate în cercetare. Nu cred că ar fi o afirmaţie hazardată dacă aş spune că Ţiţeica a fost primul cercetător autentic produs de şcoala de la Bucureşti, un matematician care a rămas activ toată viaţa în domeniul său de cercetare.

Rolul pe care îl joacă sferele nu se opreşte la aproximarea curburii pe suprafaţă. Ar merita povestit aici felul în care a apărut acel domeniu al geometriei numit *geometrie diferenţială afină.* Descoperirea a avut loc la Bucureşti, în primăvara care a precedat răscoalele din 1907. După ce a devenit profesor plin la Universitate, în 1903, Gheorghe Ţiţeica a avut o perioadă de cercetare extrem de fertilă, care a durat mai bine de un deceniu. A publicat o serie de articole importante între 1906 şi 1916 în cele mai prestigioase reviste ştiinţifice ale vremii, aşa cum erau *Comptes Rendus* şi *Rendiconti.* Ţiţeica avea 33 de ani atunci când prima lui lucrare despre legătura dintre curbură şi transformările liniare a apărut la Paris.

Dacă în ceea ce priveşte prestigiul unei reviste cum este *Comptes Rendus*, a Academiei de Ştiinţe din Paris, nu e nevoie să insistăm prea mult, ar trebui spus că *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* fusese fondată în 1884 de matematicianul Giovanni Guccia (1855-1914), fiul unei importante familii siciliene foarte bogate, înrudită cu nobilimea din sudul Italiei. Giovanni Guccia şi-a susţinut doctoratul sub conducerea lui Luigi Cremona (1830-1903) la Roma şi şi-ar fi dorit să introducă Palermo în circuitul academic mondial. În acest sens, a dotat Cercul Matematic cu un loc de întâlnire, o bibliotecă şi i-a pus la dispoziţie finanţarea necesară. Aceste intenţii au atras colaborări valoroase, astfel încât lucrări de importanţă crucială pentru matematica de la finele secolului al XIX-lea şi începutul veacului următor au apărut în *Rendiconti.*

Între altele, *Complément à l'analysis situs*, lucrare publicată în această revistă de Poincaré în 1899, sau ultima lucrare a lui Poincaré apărută în 1912 tot în *Rendiconti*, intitulată simplu *Sur un théorème de géometrie*, un studiu care a dat naştere unor cercetări cu consecinţe importante până în vremurile noastre2.

Ţiţeica şi-a început discuţia lui despre aşa-numitul invariant afin (pe care îl vom descrie aici) subliniind că e interesat de acele suprafeţe a căror curbură într-un punct *P* e proporţională cu puterea a patra a distanţei de la originea axelor de coordonate la planul tangent dus la suprafaţă în *P*, distanţă notată cu *d.* El a numit suprafeţe de clasă *S* toate acele suprafeţe care satisfac această proprietate, mai precis egalitatea *K = o constantă d4*.

Şi acum surpriza. Ţiţeica studia efectul pe care îl au transformările liniare asupra spaţiului cu trei dimensiuni. În calcule, el urmărea ce se întâmplă cu formula suprafeţei atunci când vectorul de poziţie al unui punct mobil de pe suprafaţă este înmulţit cu o matrice pătratică de dimensiune trei pe trei. Rezultatul pe care Ţiţeica îl comunica în 1907 Academiei din Paris era următorul: Dacă o transformare liniară care păstrează fix atât punctul *O*, cât şi infinitul este aplicată ecuaţiei unei suprafeţe de tip *S*, atunci se obţine tot o suprafaţă de tip *S*, având centrul tot în *O.*

Intuiţia lui Ţiţeica a fost extraordinară. Câte tatonări să fi făcut până a ajuns la studiul proporţionalităţii dintre curbura gaussiană şi distanţa *d*? Lucrarea lui din 1907 se încheie cu rezultatul principal: O transformare liniară care nu schimbă nici planul de la infinit, nici originea lasă neschimbat raportul dintre curbura gaussiană a suprafeţei şi *d4.*

Importanţa acestui rezultat este următoarea: există o legătură profundă între curbura gaussiană şi unele categorii de deformări ale suprafeţelor, mai precis cele descrise de transformări liniare, adică de cele care se pot reprezenta prin matrice.

Atunci când a studiat aceste lucruri, Ţiţeica ştia că

urmează una dintre direcţiile de cercetare descrise de Felix Klein în 1872 în aşa-numitul *Program de la Erlangen*. Klein enunţase o problemă foarte generală: „Să se studieze cum anume transformările spaţiului, aşa cum sunt cele reprezentate de matricele pătratice trei pe trei, influenţează geometria, figurile şi ce cantităţi anume rămân neschimbate atunci când aplicăm aceste transformări”. Chiar aşa, ce legătură ne-am fi aşteptat să fie între curbură şi deformările exprimate prin matrice pătratice? La prima vedere, n-ar trebui să aibă de-a face una cu celelalte. Dar iată că există o legătură, care nu e deloc evidentă.

Descoperirea acestei legături este marele merit al lui Gheorghe Ţiţeica. Fiind elev în şcoala elementară, îi întâlnisem numele fie în legătură cu problema celor trei cercuri, fie atunci când era vorba despre culegerea sa de probleme. Dar adevărata importanţă a cercetărilor lui depăşeşte ceea ce se povesteşte în şcoala elementară3.

1. Episodul e povestit de George Szpiro în *Poincaré’s Prize: The Hundred-Year Quest to Solve One of Math’s Greatest Puzzles*, Plume, New York, 2008.

2. Celebra conjectură a lui Poincaré a fost demonstrată de Grigori Iakovlevici Perelman într-o lucrare făcută publică în noiembrie 2002.

3. Am studiat lucrările originale atunci când am scris, alături de trei colegi, lucrarea: Alfonso F. Agnew, Alexandru Bobe, Wladimir G. Boskoff, Bogdan D. Suceavă, „Gheorghe Ţiţeica and the origins of affine differential geometry”, *Historia Mathematica*, Elsevier (Science Direct), vol. 36, nr. 2, mai 2009, pp. 161-170.

Povestea lui Sebastian Kaufmann şi a *Gazetei matematice* de acum un veac

La finele veacului al XIX-lea a existat pentru o vreme tendinţa ca unii specialişti să-şi obţină un doctorat de excelentă calitate în Vest şi apoi, odată întorşi în România, să nu-şi mai continue cercetările, ca şi cum lumea

românească nu i-ar fi motivat în acest sens. Poate cel mai elocvent exemplu e Spiru Haret, care din cercetător de elită în domeniul mecanicii cereşti a devenit un excelent administrator al învăţământului, ceea ce probabil că nu este puţin lucru, dacă ne gândim ce moştenire importantă a lăsat şcolii româneşti. O altă categorie interesantă sunt tinerii care promit mult, dar care nu devin totuşi nici universitari, nici cercetători, deşi au dat la o vârstă fragedă dovezi ale talentului şi inspiraţiei. În acest sens, şi istoriile din linia a doua a unei culturi sunt relevante. Pe de altă parte, interesul unor autori pentru anumite probleme ştiinţifice dintr-un anumit moment istoric poate da măsura profunzimii reflecţiei dintr-un spaţiu cultural în perioada respectivă, dar şi măsura felului cum era motivat şi folosit talentul autentic. Matematica e în acest sens o bună măsură: momente autentice ale creaţiei matematice se pot vedea şi la elevi de liceu, bunăoară. Faptul că m-am întâlnit cu povestea pe care o voi aminti aici nu e deloc întâmplător. Am descoperit că o anumită problemă elementară de geometria curbelor din plan fusese abordată într-un mod foarte pragmatic cu aproape un veac în urmă într-un articol publicat în *Gazeta matematică*. Istoria aceasta merită evocarea unui întreg regat al umbrelor, şi nu voi ezita să o fac aici.

Faptele pe care le vom rememora se petreceau în epoca în care Gheorghe Ţiţeica, revenit de mai bine de un deceniu în România după ce şi-a susţinut teza de doctorat sub conducerea lui Gaston Darboux, descoperea conceptele care stau la baza geometriei diferenţiale afine. Ţiţeica a reprezentat în Vechiul Regat primul model al unui profesor realizat atât în perioada studiilor pariziene, cât şi în cariera care le-a urmat, odată întors în ţară.

Ţiţeica nu a fost doar un cercetător de elită, ci şi un educator sincer interesat de soliditatea şcolii româneşti de matematică. Grija cu care coordona organizarea Concursului *Gazetei matematice* o dovedeşte. Pe vremea aceea, între altele, Ţiţeica scria rapoartele anuale asupra Concursului şi a decernării premiilor, iar acestea erau

publicate ca editoriale în *Gazetă*. De exemplu, cea de-a zecea ediţie a Concursului Societăţii *Gazeta matematică* e consemnată în numărul 9 din 1910 al revistei, a cărei arhivă editată de Softwin poate fi consultată pentru majoritatea detaliilor pe care le vom aminti aici. Între cei cărora Societatea le adresează mulţumiri pentru susţinerea ediţiei din 1910 a Concursului se află şi B. Delavrancea, pe atunci ministru al Lucrărilor Publice, „pentru înlesnirea biletelor de drum pentru ducerea şi întoarcerea candidaţilor din provincie”. Articolul ne dă informaţii şi asupra fenomenului: s-au înscris în competiţie 75 de candidaţi din întreaga ţară, dintre care au fost aleşi, „potrivit activităţii lor la *Gazetă*”, 36. Victoria în competiţie, pe vremea aceea, nu era un lucru uşor: Concursul *Gazetei matematice* avea atât probă scrisă, care consta în mai multe „teze”, cât şi orală. În 1910 avea să câştige C. Mititelu, elev în clasa a VII-a la Liceul „Gh. Roşca Codreanu” din Bârlad. Un an mai târziu, în numărul 9 din 1911 al *Gazetei matematice*, sunt din nou adresate mulţumiri lui B. Delavrancea pentru aceleaşi înlesniri ale călătoriilor, precum şi dlui C. Mironescu, directorul Şcolii de Poduri şi Şosele, pentru sala unde s-au ţinut lucrările scrise, dar şi lui E.A. Pangrati, noul ministru al Lucrărilor Publice, care, în calitate de rector al Universităţii Bucureşti, a pus la dispoziţie sala unde s-au susţinut probele orale. Câştigătorul din 1911 a fost Dan Barbilian, elev în clasa a VI-a la Liceul „Gh. Lazăr”, despre care editorialul *Gazetei* consemnează „că a îndeplinit condiţiunile pe care le cerem noi pentru această deosebită cinste”. Patruzeci de ani mai târziu, în unul dintre textele publicate într-un volum din *Pagini inedite*, Barbilian scria despre concursul pe care l-a câştigat: „Ce voi fi scris în teză? Aprecierea lui Ţiţeica («foarte bună teză de algebră») m-a mirat. Să fi ieşit eu la mal, din atâtea calcule numerice? Dacă detaliul tezei îmi scapă, atmosfera acelei săli prăfuite (a Şcolii de Poduri) şi a după-amiezei aproape nordice, cu lumină polarizată, o regăsesc. Teza de geometrie, trecută dimineaţa, o resimt şi astăzi ca un

moment trăit. Teza de algebră rămâne, oarecum, hipnotică”.

Un an mai târziu, referindu-se la contextul politic care a precedat războaiele balcanice, în numărul 10 din 1912, Gheorghe Ţiţeica scria: „Anul acesta a fost un an greu pentru ţara întreagă, prin urmare şi pentru *Gazeta matematică*. Preocupările tuturor au fost îndreptate mai mult asupra furtunii care ne ameninţă, încât cu greu s-a mai putut da şi pentru *Gazetă* prinosul de muncă cu care ne obicinuisem”. Pentru a descrie parte dintre dificultăţi, Ţiţeica menţionează că în ediţia din 1912 a Concursului nu a fost niciun participant din Iaşi, de unde veneau de obicei concurenţi care se clasau pe locurile fruntaşe. Avea să se situeze pe primul loc Cristea Mateescu, elev în clasa a VIII-a la Liceul „B.P. Hasdeu” din Buzău, urmat de G. Negreanu, din clasa a VI-a a Liceului „Mihai Viteazul” din Bucureşti. Tot în anul acela, poziţia a cincea avea să fie ocupată de Şerban Gheorghiu, pe atunci elev în clasa a VI-a la Liceul „Mihai Viteazul” din Bucureşti. Pentru cititorii corespondenţei lui Dan Barbilian, numele acesta spune ceva: Şerban Gheorghiu e unul dintre contemporanii cu care Barbilian comunica cel mai deschis, adresându-şi acestuia scrisorile ca unui egal redutabil. A treisprezecea ediţie a Concursului, când Şerban Gheorghiu a ieşit pe locul doi, mai consemnează o apariţie interesantă: pe locul şase comisia de concurs îl clasează pe Sebastian Kaufmann, elev în clasa a V-a la liceul din Focşani, despre care se notează astfel în raportul de concurs: „are calităţi reale, pe care le-a arătat la probleme scrise. Proba scrisă de aritmetică a fost excelentă şi a dovedit că dl Kaufmann are spirit aritmetic, ceea ce e rar, mai ales în clasa a V-a. Oralul n’a prea fost la aceiaşi înălţime”. După cum se vede, profesorul Ţiţeica nu era un fervent practicant al politeţii în defavoarea francheţii, iar unele dintre observaţiile lui ar putea contraria cititorul de azi prin aura lor abruptă: „Din clasa a V-a, în afară de dl Kaufmann, înscris în lista premianţilor, niciunul dintre ceilalţi 5 candidaţi nu merită

nicio menţiune, din cauza răspunsurilor prea slabe”.

În numărul 9 din 1914, Gh. Ţiţeica scrie:

„Astă toamnă, către sfârşitul lui Octomvrie, pe când se discutau în şedinţa *Gazetei* condiţiunile concursului, care, ca de obicei, trebuiau anunţate în numărul de pe Noemvrie, cea mai mare parte dintre membrii Societăţii eram convinşi că, de data asta, din cauza evenimentelor, concursul nu va putea să aibă loc. Şi cu toate acestea, cu toată atmosfera grea, cu toată nesiguranţa zilei de mâine, concursul s-a anunţat, înscrierile s-au făcut şi diferitele lui probe s-au ţinut”.

În anul acela avea să câştige Al. Pantazi, elev în clasa a VIII-a la liceul din Piatra-Neamţ. Sebastian Kaufmann a ieşit pe locul patru, şi „a făcut două probe scrise, de algebră şi de geometrie, foarte bune sub toate raporturile. Păcat că oralul n-a fost la aceiaş înălţime”. E clar din aceste însemnări că exista o creştere calitativă în abilităţile tânărului matematician.

Ultimul Concurs al *Gazetei* din perioada aceea s-a ţinut în 1915, după care această activitate remarcabilă avea să sufere o întrerupere de cinci ani: următorul Concurs al *Gazetei* va avea loc abia în 1920. Atunci însă, în 1915, se pare că a fost o ediţie de foarte bună calitate a Concursului. Pe primul loc s-a clasat Radu Augustin, de la Liceul „Gh. Lazăr” din Capitală, urmat de I. Suchăr, de la Liceul „Matei Basarab”. Sebastian Kaufmann a ieşit pe locul al treilea. Despre el, Gheorghe Ţiţeica scrie în raportul despre concurs publicat în *Gazetă* că „e cel mai iscusit dintre corespondenţii actuali ai *Gazetei*. Multe dintre problemele propuse, grele şi delicate, au fost descurcate de dânsul, încât eram aproape siguri că va fi în fruntea listei. Din nefericire lucrarea scrisă de trigonometrie lasă de dorit şi unele răspunsuri orale n-au avut siguranţa la care ne aşteptam. De aceea l’am lăsat în locul al treilea”.

Prima problemă propusă sub semnătura lui Sebastian

Kaufmann apare în *Gazeta matematică* în numărul 10 din 1913, când autorul ei avea probabil în jur de 15 ani. E o problemă de teoria numerelor. Avea să publice alte cinci probleme în 1914, ceea ce justifică observaţia lui Gheorghe Ţiţeica despre calitatea contribuţiilor lui la *Gazetă*. Au fost cu totul 17 probleme propuse, într-un interval de treisprezece ani. S. Kaufmann avea să scrie în total patru articole, plus câteva note. Unul dintre articole e cu totul deosebit. Mai există lucrări extraordinare scrise de liceeni, dar acesta merită numai el o poveste. Textul se intitulează „Asupra unor curbe algebrice” şi e publicat în numărul 6 din 1916 al *Gazetei matematice*, probabil nu departe de momentul când autorul articolului îşi încheia studiile liceale. În această lucrare, Sebastian Kaufmann consideră o curbă algebrică de grad arbitrar şi îşi pune problema caracterizării acelor curbe pentru care proprietatea puterii punctului se păstrează, în analogie cu proprietatea similară care e adevărată pentru cercurile din planul euclidian. Pentru acest studiu şi pentru a caracteriza respectiva clasă de curbe, el foloseşte coordonate polare şi un calcul trigonometric inteligent. (Se pare că trigonometria devenise între timp punctul său forte, ceea ce sugerează că însemnările din editorialul lui Ţiţeica l-au motivat să studieze tot mai mult.) Şi iată partea interesantă a istoriei. Din câte am reuşit să aflu, aceeaşi problemă elementară avea să fie studiată în alte publicaţii mult mai târziu, mai precis de către E.H. Neville, în articolul „The power of a point for a curve”, apărut în revista britanică *The Mathematical Gazette* abia în 1956. În 1963, A. Loeffler a publicat articolul „Sur la puissance d’un point par rapport à une conique”, în *Elemente der Mathematik*. Chiar şi după aceste articole, ai căror autori nu cunoşteau articolul lui Kaufmann şi care, în consecinţă, nu îl citează, ni se pare că lucrarea din 1916 îşi păstrează originalitatea şi caracterul interesant. Şi de ce ar fi acest detaliu important? – s-ar putea întreba cineva. Mie mi se pare extraordinar că un licean din România războaielor balcanice, din scurtul interval de timp dintre aceste

conflicte militare şi Primul Război Mondial, şi-a propus studiul unei asemenea probleme şi că lucrarea i-a apărut în revista la al cărei concurs el a participat de trei ori. Detaliul acesta dă măsura atmosferei intelectuale a momentului. Din păcate, cred că niciuna dintre celelalte contribuţii ale lui Sebastian Kaufmann nu se apropie în profunzime de acel rezultat obţinut de autor la 18 ani. De fapt, nu ştiu mai multe despre Sebastian Kaufmann. E uşor de descoperit că între 1919 şi 1926 nu a mai colaborat la *Gazeta matematică*. În 1926, a mai trimis două probleme propuse, dar acestea sunt mai degrabă de nivel mediu şi parcă nu mai păstrează nimic din strălucirea de odinioară a autorului. După acest moment, baza de date a *Gazetei* nu mai consemnează nimic despre el.

*

Împreună cu Mihaela Vâjiac şi Adrian Vâjiac[1] am scris lucrarea *The power of a point for some real algebraic curves*, în care am continuat studiul iniţiat de teorema lui S. Kaufmann, reaşezând totodată cronologia în ordinea ei reală. Lucrarea noastră a apărut în martie 2008 în revista britanică *The Mathematical Gazette*. A fost o experienţă interesantă să explorăm atmosfera extraordinară a epocii, acel mediu neobişnuit de comunicare şi travaliu de acum un secol, precum şi fertila atmosferă creată în jurul *Gazetei matematice* la începutul secolului XX.

1. Ambii de la Universitatea Chapman, din Orange, California. Amândoi au urmat la Universitatea din Bucureşti cursul opţional de *Capitole speciale în teoria relativităţii* cu profesorul Stere Ianuş în anul universitar 1992-1993, pe care l-am rememorat mai înainte. Şi acesta nu este singurul teren comun care ne reuneşte interesele de cercetare.

De la *Programul de la Erlangen*, al lui Felix Klein, la poemele lui Ion Barbu din *Joc secund*

Multă vreme nu am înţeles adevărata importanţă a contribuţiilor în matematică ale lui Gheorghe Ţiţeica şi

Dan Barbilian, şi nu am înţeles aşa cum mi-aş fi dorit nici legătura dintre cercetarea lor matematică şi poemele din *Joc secund*, volumul semnat de Ion Barbu şi apărut în 1930. Am întâlnit pentru prima oară definiţia suprafaţelor Ţiţeica pe când eram student, în anul II, la Facultatea de Matematică a Universităţii din Bucureşti. Aşa cum ne era prezentată la curs, definiţia respectivă era doar o caracterizare metrică, lipsită de semnificaţia ei originară, cea care ilumina ideile în contextul grupurilor de transformări. În acel concept, introdus de Ţiţeica în 1907, într-o lucrare mult citată, apărută în *Comptes Rendus*, la Paris, se afla codificată o întreagă viziune a unei epoci, era surprins spiritul momentului. Cât am fost student, în cei şase ani pe care i-am petrecut la Bucureşti, nu am întâlnit niciodată la curs vreun studiu pe textul originar al lucrărilor lui Ţiţeica sau Barbilian, şi nici vreo menţiune a *Programului de la Erlangen*, eseul lui Felix Klein din 1872, a cărui influenţă avea să schimbe felul în care s-a structurat geometria de atunci şi până azi. M-ar fi interesat enorm întrepătrunderea dintre acea construcţie teoretică şi cultura română. Cine ar fi crezut că acele idei pot să devină, graţie lui Barbilian, sursa de inspiraţie a unei poetici? De fapt, Barbilian a explicat aceste lucruri cu asupra de măsură, dar pentru multă vreme nimeni nu a înţeles acele explicaţii. Aceste concepte nu au fost discutate în vremea studenţiei mele nici la cursul de filosofia ştiinţei, nici în vreunul dintre cursurile de nivel superior de geometrie (şi le-am urmat pe toate). La o distanţă de două generaţii, Universitatea din Bucureşti îşi pierduse tradiţia şi, cel puţin la Facultatea de Matematică, a fost nevoie de un oarecare efort ca să recuperez unele informaţii.

În 2005, am avut şansa să revin la aceste idei şi să încerc să le înţeleg. Nu-mi doream nimic mai mult decât o decriptare competentă. Şansa s-a ivit sub forma unei invitaţii din partea lui Wladimir Boskoff de a lucra alături de el într-un proiect care aparţine domeniului geometriei metrice. De atunci, după ce am scris peste douăzeci de

articole de matematică împreună (nu toate pe această temă), Wladimir Boskoff îmi pare a fi nu doar un coautor ideal, ci şi, prin profunzimea ideilor matematice cu care a lucrat multă vreme, un cercetător redutabil. Mi-a plăcut enorm încăpăţânarea cu care a urmărit vreme de mai bine de două decenii idei pe care alţi matematicieni nici nu le-au înţeles, nici nu le-au abordat cu rigoarea necesară. Cu atât mai mult mi-am dorit să înţeleg, să decriptez, să reconstitui un ambient de idei şi de viziune din vechea perioadă când domenii disjuncte se puteau întâlni. Nu era vorba doar de aspectul matematic, pur tehnic, ci de ceva mai mult, de o întreagă paradigmă, *felul cum gândea Barbilian în perioada 1928-1929, când s-au scris poemele din* Joc secund*.* Pe lângă aceasta, am vrut să înţeleg de unde provin momentele de succes ale trecutului, cele de la Universitatea Bucureşti, dintr-o perioadă când Ţiţeica era enumerat printre cei mai abili geometri ai momentului de către L.P. Eisenhart sau când Barbilian era un partener egal de discuţii al lui Wilhelm Blaschke (în decembrie 1934, Barbilian a susţinut o conferinţă la Bucureşti în care a prezentat rezultate obţinute în colaborare cu Blaschke; din acel proiect nu a rezultat o publicaţie, dar ştim cu certitudine că intenţia şi dialogul au existat). Şi, mai cu seamă, ceea ce îmi doream cel mai mult era să pricep: care era legătura cu literatura? Simplul fapt că putem adresa o asemenea întrebare e ceva care merită detaliat.

Cred că subiecte ca acesta nu pot fi abordate decât dacă viziunea noastră e dublată de multă modestie. E necesară o deschidere către mai multe domenii, în felul viziunii pe care şcoala cea veche o forma, dar pe care timpurile recente nu o mai egalează. Îmi e greu să cred că în vremurile noastre mai există viziuni care să cuprindă totodată dimensiunea filosofică a Programului de la Erlangen, aspecte de teorie literară, noţiuni de fundamentele geometriei, analiză complexă şi geometrie metrică. Iar Barbilian le vedea pe toate, nu am nicio îndoială asupra acestui lucru, cu un nivel de competenţă şi creativitate pe care azi nu mai ştiu cine l-ar putea avea.

Faptul că secolul trecut ne-a lăsat creaţii a căror semnificaţie poate fi apreciată doar având în vedere dezvoltarea sincronă a unor domenii este cu atât mai remarcabil şi mai ieşit din comun. Suntem norocoşi că o asemenea placă turnantă a existat în câmpul culturii române şi că o putem contempla în original, şi încă sub semnul unei atât de savuroase culori locale. Putem aşadar încerca să înţelegem, urmând ordinea istorică a unor fapte.

Până acum câţiva ani, nu îmi propusesem să studiez aspectele matematice ale operei lui Dan Barbilian. În primăvara anului 2001, când eram student la Michigan State University şi principala mea preocupare era domeniul inegalităţilor geometrice, Wladimir Boskoff a fost invitat la East Lansing să facă o prezentare despre spaţiile Barbilian în cadrul seminarului de geometrie diferenţială coordonat pe atunci de profesorul David E. Blair1. Prezentarea lui Wladimir Boskoff a avut o capacitate de sinteză şi o viziune culturală care mi-au trezit interesul. După seminar am discutat cu fostul meu profesor de topologie, John D. McCarthy, care mi-a tradus în limbaj modern câteva dintre posibilele dezvoltări ale problemelor firesc ridicate de cercetarea rămasă moştenire de la Barbilian. Atunci am realizat că mă aflu în vecinătatea unei mine de aur, unde se pot obţine rezultate noi şi unde se poate înţelege foarte mult. Sub îndrumarea lui Wladimir Boskoff, am încercat să citesc unele dintre textele matematice ale lui Barbilian, care s-au dovedit extrem de dificile. Îi sunt profund îndatorat lui Wladimir Boskoff pentru că a păstrat aceste texte încă lizibile. Căci Barbilian scrie matematică fără milă faţă de cititor, iar unele pagini de geometrie sunt mai criptice decât poemele sale. Înăuntru însă, diamantele sunt la locul lor. Astăzi sunt convins că e vorba despre cea mai fundamentală contribuţie în matematici realizată de un cercetător format într-o universitate românească. Ideea aşa-numitelor spaţii Barbilian e de o generalitate şi de o profunzime atât de impresionantă, încât şi la decenii distanţă impresionează

prin temeritate2. Am făcut o primă prezentare despre spaţiile Barbilian pe 17 aprilie 2005, în cadrul conferinţei secţiunii de Vest a American Mathematical Society, la Santa Barbara. Pe 19 ianuarie 2006 am prezentat, la Michigan State University, în seminarul de geometrie diferenţială, câteva noi rezultate despre spaţiile Barbilian, prilej de a discuta din nou despre subiect cu profesorii David Blair şi John McCarthy3.

*

Nu mi-am propus o interpretare a poeziei lui Ion Barbu. Există asupra acestui subiect mai multe exegeze a căror misiune e bine îndeplinită. Ceea ce ne propunem e cu totul altceva: *reconstituirea*, în context literar, a universului de idei inspirate din matematică şi eventual din filosofia ştiinţei care au permis, în perioada 1928-1929, scrierea formei definitive a poemelor din volumul *Joc secund.* O operaţiune de reconstituire a unui context cultural e altceva decât interpretarea, dar şi decât istoria literară sau simpla istorie a matematicii. Aici, lucrurile trebuie redate în integralitatea lor şi conexiunile culturale trebuie făcute.

Mai mult, dacă izbutim să decriptăm acest ambient de idei, *atunci reuşim să punem în evidenţă una dintre importantele surse de inspiraţie ale modernismului românesc.*

Această argumentaţie nu putea fi expusă mai devreme, chiar dacă faptele despre care va fi vorba aici s-au petrecut demult. Motivul ţine de dezvoltarea temei în matematică: numai foarte recent au fost înţelese de către cercetători anumite punţi de legătură. De exemplu, faptul că procedura de metrizare a lui Barbilian are un caracter unificator în geometrie apare prima oară într-unul dintre articolele scrise de Wladimir Boskoff şi de mine, dintre cele amintite mai sus.

Şi mai e ceva. Idei aparent disparate au avut în anii douăzeci ai veacului trecut un trunchi comun. Apoi, între domenii a apărut o frontieră greu de trecut. Viziunea universală din prima jumătate a veacului douăzeci se

recompune azi numai cu semnificative eforturi. Şi abia acum putem spune: procedura de metrizare a lui Barbilian este o idee tehnică de maxim interes, perfect sincronă vremii sale, anilor treizeci ai secolului trecut, când apăreau primele elemente din dezvoltarea geometriei metrice.

Una dintre concluziile la care am ajuns pe parcursul studiului nostru a fost aceea că unul dintre cele mai neaşteptate izvoare ale literaturii moderne române îşi are originile în evoluţia ideilor din câmpul geometriei din a doua jumătate a veacului al XIX-lea, în paradigma deschisă de Sophus Lie, Gaston Darboux şi Felix Klein, odată cu interacţiunea lor din perioada 1869-1872. Barbilian o spusese de câteva ori, dar abia acum vedem adâncimea afirmaţiei: şi poemele din *Joc secund* sunt parte a construcţiei. Oricât de paradoxală ar fi o asemenea afirmaţie, la o atentă analiză a istoriei ideilor vom descoperi că graţie acestei filiaţii ne aflăm în prezenţa unei poetici spectaculoase. Simpla conexiune dintre cercetarea fundamentală dintr-un domeniu oarecare, în cazul de faţă geometria, şi literatură e suficientă pentru a ne atrage atenţia. Dar acum e vorba de mai mult decât atât: putem descrie apariţia şi consecinţele unei construcţii care a avut două expresii. Una dintre ele sunt poemele din *Joc secund*, semnate de Ion Barbu. Cea de a doua o reprezintă cercetarea lui Dan Barbilian asupra oscilaţiei logaritmice (pentru a clarifica terminologia, vom spune că formula oscilaţiei logaritmice dă aşa-numita procedură de metrizare a lui Barbilian). Conexiunea aceasta a fost posibilă în intervalul mai larg de timp dintre 1927 şi 1935. Această legătură profundă nu a fost rodul hazardului, ci e în mod natural îndatorată unor evoluţii din spaţiul ideilor ajunse la maturitate în perioada interbelică. Atunci viziunea integratoare a Programului de la Erlangen ajunsese la apogeu.

Nu ne propunem să facem aici întreaga istorie a acestui fenomen. O descriere completă ar trebui să treacă printr-o bună componentă a istoriei matematicii, în special

a istoriei geometriei. Pentru a aşeza într-un context potrivit această tematică, ar trebui să cuprindem în ansamblul ideilor geometrice contribuţiile revoluţionare datorate lui Bernhard Riemann, Sophus Lie, Gaston Darboux, Felix Klein şi David Hilbert. O explicaţie completă ar trebui să includă impactul pe care *Programul de la Erlangen* al lui Felix Klein l-a avut asupra universului de idei de la Universitatea Bucureşti de la finele veacului al XIX-lea şi începutul secolului XX, cel puţin până la 1921, când Barbilian şi-a susţinut licenţa. Apoi ar trebui să urmărim ideile pe care Barbilian le-a asimilat în cursurile pe care le-a frecventat la Göttingen între toamna anului 1921 şi 1924. La capătul acestei descrieri ne devine accesibilă ambianţa ideatică ce a pregătit terenul pentru construcţia duală reprezentată de poemele din *Joc secund* şi de oscilaţia logaritmică. La o analiză atentă, aceste două laturi ale creaţiei unui singur cercetător nu pot fi despărţite. Ce a izbutit matematic în una dintre ele a exprimat poetic în cealaltă.

*

Volumul *Joc secund* a inaugurat în 1930 colecţia „Biblioteca portativă" a Editurii Cultura Naţională, în editarea lui Alexandru Rosetti. Aşa cum a apărut iniţial, volumul e împărţit în cicluri. Primul dintre aceste cicluri cuprinde cinci poeme: primul dintre ele nu are titlu şi e preluat în alte ediţii ulterioare fie sub titlul *Joc secund*, fie sub un titlu marcat prin semnul * * *, iar următoarele sunt *Timbru*, *Grup*, *Înecatul* şi *Orbire.*

Organizarea acestui prim ciclu nu e întâmplătoare. La baza acestor poeme se află o temă comună, foarte bine descrisă în *Timbru* de cea de-a doua strofă: „Ar trebui un cântec încăpător, precum/ Foşnirea mătăsoasă a mărilor cu sare; / Ori lauda grădinii de îngeri, când răsare/ Din coasta bărbătească al Evei trunchi de fum". Aceste versuri propun o temă oarecum aparte în poezia românească din epocă, o temă pe care o vom numi *tema cântecului încăpător.* Ele merg în acelaşi sens cu pasajul „Poetul ridică însumarea/ De harfe răsfirate ce-n zbor invers le pierzi/ Şi cântec

istoveşte […]” (*Joc secund*), dar şi cu versul mult sintetizat: „Găsi-vor gest închis, să le rezume” (*Grup*), sau: „Atlanticei sunt robul vibrat spre un mărgean” (din poemul *Înecatul*).

Toate aceste pasaje marchează tendinţa unei căutări, a reducerii la esenţe, o întoarcere la principii fundamentale „ce-n zbor invers le pierzi”. Acest principiu fundamental este „gestul închis”, menit „să rezume”. Ar fi greu să înţelegem aceste texte fără a încerca să descriem aici viziunea celor care au făcut cercetare în fundamentele geometriei în prima jumătate a secolului XX. Pe atunci, influenţa lui David Hilbert era dominantă, iar Barbilian a urmat cursurile lui Hilbert (în toamna lui 1921), şi nu în mod întâmplător: s-a dus la Göttingen special pentru asta. Pentru cineva care a trecut prin experienţa axiomaticii, era imposibil ca acest lucru să nu lase urme. În ce fel? Şi are oare această experienţă de-a face cu arhitectura poemelor din *Joc secund*? Motivul dominant al cântecului încăpător ne sugerează că da.

Întoarcerea la principiile fundamentale are un echivalent în fundamentele geometriei: analiza axiomatică, analiza inversă. Victor Pambuccian descrie astfel acest tip de raţionament4: „Atunci când conjecturăm o teoremă în geometrie, încercăm întâi să o demonstrăm cu orice mijloace avem la dispoziţie. După ce îi stabilim adevărul, putem să urmărim o analiză inversă [în original: *reverse analysis*], prima oară descrisă de Pappus din Alexandria drept *analiză*, şi putem să ne întrebăm nu dacă teorema este adevărată, ci ce avem nevoie să presupunem pentru a ne asigura că ea este adevărată”. E inevitabil ca această descriere să nu ni se prezinte ca o analogie la „zborul invers” din poemul *Joc secund*. Acest proces se vedea în anii douăzeci ai veacului trecut prin perspectiva rezultatelor lui Felix Klein asupra importanţei unificatoare a geometriei proiective; de aceea Barbilian îşi descria cercetările ca fiind situate în paradigma deschisă de Programul de la Erlangen.

Şi încă o idee importantă bine subliniată de Victor Pambuccian în acelaşi articol: „Ceea ce căutăm în analiza

inversă e minimizarea numărului şi a complexităţii noţiunilor şi ipotezelor folosite în demonstraţia unui anume enunţ, şi putem foarte bine să ajungem la sisteme axiomatice diverse, exprimate cu noţiuni primitive, care nu sunt deloc comparabile". Fireşte, ne propunem aici o discuţie pe marginea unui text literar. Dar, din pricina naturii textului în discuţie, nu am putea avansa deloc în înţelegerea lui dacă nu am admite că formaţia autorului său, a lui Dan Barbilian, e prezentă în mod decisiv în text. E imposibil să nu vedem în harfele răsfirate „ce-n zbor invers le pierzi" o analogie cu analiza inversă. Ce înseamă oare „robul vibrat spre un mărgean"? Dar „gestul închis"? Această temă, a reducerii la esenţe, repetată în întregul ciclu *Joc secund*, e felul în care un matematician educat în spiritul Programului de la Erlangen sugera prin metafore ceea ce analiza axiomatică produce în geometrie.

Nu e vorba despre orice om de ştiinţă, aşa cum sugerează unii autori, ci de experienţa cuiva care a făcut cercetare în domeniul fundamentelor geometriei şi care l-a urmărit pe David Hilbert la curs. La finele studiului pe care l-am făcut am descoperit că Barbilian nu doar a căutat în cercetarea lui acest „gest unitar", dar a şi izbutit realizarea unei construcţii duale: experienţa descrisă în poezie e dublată de cercetarea matematică a aceluiaşi autor. Pentru că oscilaţia logaritmică *este un astfel de „gest închis", este un procedeu matematic care izbuteşte să genereze metrica euclidiană, metrica sferică şi metrica hiperbolică.* Pentru Barbilian, motivul *cântecului încăpător* nu a fost doar vorbă goală, pentru că el a şi construit un astfel de procedeu cuprinzător. Şi nu sunt multe astfel de procedee unificatoare în geometrie. Faptul acesta nu mai aparţine doar culturii române, ci trece dincolo de marginile ei. Cu o astfel de construcţie, Barbilian a izbutit nu doar în poezie, ci şi în geometrie.

Poemele din *Joc secund* nu sunt doar ermetice, ci au substanţă precisă, au conţinut, sunt despre un subiect precis: ele descriu o axiomatică ideală a lumii întregi. Asta sugerează condiţional-optativul din: „Ar trebui un cântec

încăpător, precum/ Foşnirea mătăsoasă a mărilor cu sare”. Discuţia acestei idei ne pune în situaţia de a reanaliza sub o nouă perspectivă poetica lui Barbilian, care ne apare acum a fi mult mai profundă decât părea multora dintre contemporanii săi. Mai mult, în termeni de istorie a ideilor, putem afirma că acea construcţie matematică datorată lui Barbilian, procedura de metrizare, este influenţată în mod determinant de ideile Programului de la Erlangen, cel care, după descrierea sa de către Felix Klein în 1872, a influenţat în mod determinant dezvoltarea geometriei, şi că o asemenea idee, venită pe filiaţia matematică David Hilbert – Dan Barbilian, dar şi Gaston Darboux – Gheorghe Ţiţeica – Dan Barbilian, a ajuns să aibă strânsă legătură cu felul cum a fost conceput ciclul de poeme intitulat *Joc secund*. O astfel de filiaţie conduce la concluzia că a existat o influenţă semnificativă a Programului de la Erlangen asupra unei părţi a liricii lui Ion Barbu şi, implicit, asupra unor idei al căror câmp de manifestare a fost modernismul românesc.

Vom analiza această aserţiune şi în eseul următor.

1. Autor, între altele, al mult citatei monografii *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, apărută la Birkhäuser, Boston, în 2001.

2. Am scris până acum mai multe lucrări despre spaţiile Barbilian, care au apărut în *Houston Journal of Mathematics*, *Historia Mathematica*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, *Differential Geometry and Its Applications*, între altele. Toate aceste lucrări, în afară de una singură, sunt realizate împreună cu Wladimir Boskoff şi unii dintre colaboratorii lui de la Universitatea Ovidius din Constanţa. Am povestit istoria acestor idei într-un articol amplu, apărut în nr. 286 din 15-21 septembrie 2005 al *Observatorului cultural.*

3. Am început să prezint aceste idei în România în noiembrie 2006, prima oară într-o conferinţă la Facultatea de Litere a Universităţii din Piteşti. Am prezentat apoi conferinţe pe această temă în mai 2007 la universităţile

din Constanţa, Cluj-Napoca şi Oradea.

4. V. Pambuccian, „Euclidean geometry problems rephrased in terms of midpoints and point-reflections”, *Elem. Math.,* 60 (2005), 19-24.

Între laborioasa barbarie şi umanismul cel nou: istoria şi semnificaţia spaţiilor Barbilian

Ne propunem să discutăm în cele ce urmează o faţetă a poeziei lui Ion Barbu, un aspect important pentru înţelegerea contextului cultural al modernismului românesc. Această analiză ne va permite câteva observaţii care ţin de istoria ideilor şi va arăta că o revoluţie din câmpul geometriei, declanşată în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, a lăsat pe teritoriul poeziei româneşti consecinţe pur literare.

Dacă acordăm atenţie cronologiei scrierii poemelor din *Joc secund* (scrise probabil în 1929), care au precedat definirea şi studiul procedurii de metrizare a lui Barbilian, există urme explicite în poezia lui Ion Barbu a unor idei de profundă analogie cu ceea ce s-a întâmplat în geometria metrică. Sunt cunoscute mai multe interpretări interesante asupra poeziei lui Barbilian care ţin seama de experienţa sa în geometrie. Vom aminti aici ceea ce George Călinescu a scris despre poemele din *Joc secund*: „Prin cultura lui, Ion Barbu are obsesia matematică şi în paginile sale se adună toate figurile şi expresiile specialităţii, ajungând până la cabalistica matematică”.

Şi într-adevăr, ce să înţelegi la prima vedere dintr-un poem ca *Grup*? Să îl reamintim aici:

„E temniţa în ars, nedemn pământ.
De ziuă, fânul razelor înşală;
Dar capetele noastre, dacă sunt,
Ovaluri stau, de var, ca o greşală.

Atâtea clăile de fire stângi!
Găsi-vor gest închis, să le rezume,
Să nege, dreaptă, linia ce frângi:

Ochi în virgin triunghi tăiat spre lume?”

Basarab Nicolescu, în comentariul său la acest poem, spune că „Omul de ştiinţă, dornic de a construi o teorie unitară, exhaustivă a unui grup de fenomene, va reclama în mod firesc şi în domeniul spiritual o descriere completă, găsirea acestui atât de dorit «gest închis». Închiderea gestului este sinonimă cu completitudinea unei teorii. Atras de esenţe, poetul-om de ştiinţă va căuta să organizeze şi să ordoneze aceste esenţe într-un tot unitar”. Observaţia aceasta e cum nu se poate mai întemeiată, dar ar fi putut să fie mult mai precisă, dacă ar fi pus în legătură ideea poemului cu viziunea Programului de la Erlangen şi ceea ce a însemnat el pentru geometrii din acea perioadă istorică.

E important să arătăm că Dan Barbilian a căutat efectiv esenţele acestui „gest închis” şi, cu riscul de a vorbi despre lucruri mai puţin cunoscute, că a izbutit să facă asta. Mai precis, Dan Barbilian a reuşit o construcţie matematică de mare profunzime şi cuprindere în domeniul fundamentelor geometriei. Discuţia acestei idei şi analiza receptării ei ne vor pune în situaţia de a reanaliza sub o nouă lumină viziunea asupra ideii de poem la Ion Barbu. Mai mult, putem afirma că acea construcţie numită în general procedura de metrizare a lui Barbilian este puternic influenţată de ideile Programului de la Erlangen, cel care, după descrierea sa de către Felix Klein în 1872, a influenţat în mod determinant dezvoltarea geometriei. Dacă am stabili această aserţiune, ar însemna că am clarificat la nivelul istoriei ideilor influenţa esenţială pe care Programul de la Erlangen a avut-o asupra unei părţi a liricii lui Ion Barbu şi, implicit, asupra unor idei literare care s-au manifestat în spaţiul modernismului românesc.

Basarab Nicolescu mai scrie că opţiunea lui Barbilian de a folosi titlul *Grup* pentru poemul amintit mai sus e semnificativă, întrucât „titlul concentrează mesajul barbian”. Cu toate acestea, credem că Barbilian nu a avut în primul rând în vedere conceptul de grup algebric, ci

ideea mult mai profundă de concept care să conţină caracteristici invariante ale lumii, ale realităţii. Interesante sunt ideile care rămân neschimbate atunci când diverse modificări structurale acţionează asupra lor. Remarcabile sunt principiile care se află în spatele lucrurilor reale, asemănările, analogiile, cele care pot fi cuprinse într-un principiu comun. Aceasta e una dintre ideile sugerate de Programul de la Erlangen. În fapt, dacă verificăm terminologia pe sursa germană de la 1872, Felix Klein foloseşte pentru grupul ce caracterizează o geometrie termenul de *Hauptgruppe,* tradus în engleză ulterior drept *principal group.* Ideea geometrică pe care acest concept o pune în evidenţă e aceea că în aşa-numitele geometrii Klein e imposibil să distingi un punct de altul prin proprietăţi geometrice, deoarece respectivul grup acţionează asupra întregului spaţiu putând transforma orice punct într-un altul, aşa cum, de exemplu, în planul euclidian, translaţiile „mută" orice punct într-altul. E foarte probabil ca pe Barbilian tocmai acest aspect de omogenitate să-l fi interesat, ca imagine şi ca simbol.

Pentru a discuta în detaliu aceste aspecte, vom prezenta câteva referinţe de factură istorică şi personală. Vom reveni cu o interpretare asupra poeziei.

De unde se cunoştea Barbilian cu Ţiţeica? S-au întâlnit prima oară după perioada în care Gheorghe Ţiţeica, revenit de mai bine de un deceniu în România după ce şi-a susţinut teza de doctorat sub conducerea lui Gaston Darboux, descoperise conceptele care stau la baza geometriei diferenţiale afine. Ţiţeica era deja celebru pe plan internaţional, dar desfăşura o activitate importantă în domeniul educaţiei în România, între altele coordonând şi organizarea Concursului *Gazetei matematice*. Ţiţeica scria rapoartele anuale asupra Concursului şi a decernării premiilor, care erau publicate în *Gazetă* ca editoriale. Câştigătorul ediţiei din 1911 a fost Dan Barbilian, elev în clasa a VI-a la Liceul „Gh. Lazăr", despre care editorialul *Gazetei* consemnează „că a îndeplinit condiţiunile pe care le cerem noi pentru această deosebită cinste". Acesta a

fost contextul în care Barbilian l-a cunoscut pe Ţiţeica. Nu avea să-i urmeze sfaturile întotdeauna, dar primul context în care a primit informaţii de primă mână despre importanţa contribuţiilor matematice ale Programului de la Erlangen trebuie să fi fost legătura lui cu unul dintre cel mai bine informaţi geometri ai momentului.

Multe lucruri sunt foarte bine cunoscute atât matematicienilor, cât şi literaţilor. Se ştie că Dan Barbilian a studiat între 1914 şi 1921 matematica la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi că studiile i-au fost întrerupte de perioada în care şi-a satisfăcut serviciul militar în timpul Primului Război Mondial. Se ştie că între 1921 şi 1924 s-a aflat în Germania, unde a cochetat o vreme cu ideea de a scrie o teză sub îndrumarea lui Edmund Landau. La un moment dat, în 1922, Gheorghe Ţiţeica l-a povăţuit, printr-o scrisoare, să îşi scrie teza sub îndrumarea lui Wilhelm Blaschke. Dar Barbilian avea să opteze pentru teoria numerelor şi pentru Edmund Landau. După cum se ştie, acest proiect academic nu va fi încununat de succes şi, în 1924, Barbilian a revenit în România; avea să-şi susţină doctoratul abia cinci ani mai târziu, la Universitatea din Bucureşti, sub conducerea lui Ţiţeica.

În istoria matematicii, de o deosebită importanţă sunt două dintre contribuţiile lui Barbilian: o scurtă lucrare de două pagini apărută în *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* (1934-1935), unde defineşte o procedură de metrizare care va fi numită în 1938 de Leopold Blumenthal „spaţii Barbilian”, şi două lucrări apărute în Germania în 1940 şi, respectiv, în 1941, intitulate *Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien*, care au inspirat o direcţie de cercetare în geometria inelelor, direcţie asociată azi în literatura de specialitate cu numele său, al lui Hjelmslev şi al lui Klingenberg.

Biografii lui Ion Barbu (Dan Barbilian) consideră că anul 1933 ar fi reprezentat momentul întoarcerii sale la matematici. *Joc secund* apăruse de trei ani şi mare parte din creaţia lui în poezie era scrisă. Interesat încă din adolescenţă de geometria elementară, în perioada revenirii

la matematici, a „regăsirii”, Barbilian s-a dedicat unor idei din aria fundamentelor geometriei, inspirat de promisiunea generalizării unor concepte cu care se lucra de mai bine de un veac în geometria neeuclidiană. E adevărat că perioada când Barbilian a reflectat asupra unor probleme din aria geometriei hiperbolice a culminat în 1933. În acel an universitar, Dan Barbilian a predat un curs de matematici elementare şi geometrie descriptivă. Ni s-au păstrat notele de curs. În prefaţa lui scrie Barbilian că „matematicile elementare sunt matematici de întemeiere”, iar fraza aceasta e o marcă importantă a transformării moderniste a matematicilor1.

În 1934, Barbilian a participat la un congres de matematică la Praga. Comunicarea de la Praga a fost publicată, ca o scurtă notă de două pagini, cum am amintit mai sus, în culegerea de documente a conferinţei şi a fost urmată de o corespondenţă cu Wilhelm Blaschke2, care era în anii treizeci unul dintre cei mai influenţi geometri ai momentului. Blaschke a fost la congresul de la Praga şi s-a arătat interesat de ideile prezentate acolo de Barbilian.

În fapt, despre ce e vorba în toată această teorie şi în ce constă originalitatea ideii lui Dan Barbilian? Modelul Poincaré al geometriei neeuclidiene a lui Lobacevski generează în mod natural o distanţă care poate fi reprezentată ca oscilaţie logaritmică, adică sub forma unui logaritm dintr-o fracţie care exprimă maximul unei mărimi geometrice supra minimul aceleiaşi mărimi. Terminologia de oscilaţie e folosită pentru a descrie faptul că maximum şi minimum sunt considerate atunci când un punct mobil e variabil într-o mulţime dată. Contribuţia lui Dan Barbilian a fost de a analiza cât de generală e această procedură şi de a stabili o teorie a spaţiilor metrice înzestrate cu o distanţă construită în acest fel. În lucrarea din 1934, Barbilian a definit o metrică în interiorul unei regiuni planare oarecare, generalizând astfel ideea modelului geometriei hiperbolice a lui Poincaré, model definit doar în interiorul discului unitate. Cu acea metrică, interiorul mulţimii devenea un model de geometrie neeuclidiană.

Paradoxal, Barbilian nu a mai publicat nimic pe această temă în următorii cinci ani, deşi a lucrat în continuare la acest proiect, dacă e să dăm crezare însemnărilor sale. Peste ani va scrie că notele din perioada aceea s-au pierdut; avea să le refacă la finele anilor cincizeci.

Receptarea contribuţiei lui, fie şi numai pe baza scurtei note publicate la Praga, a mers mai departe. Într-un volum de Leonard Blumenthal, apărut la Universitatea din Missouri în 1938 cu un cuvânt înainte de Karl Menger şi intitulat *Distance Geometries: a Study of the Development of Abstract Metrics*, se află un paragraf dedicat spaţiilor Barbilian. După 1939, interesul matematic al lui Dan Barbilian se deplasează spre aria algebrei şi a teoriei numerelor. Din păcate, această modificare de arie a cercetării s-a petrecut înainte ca el să fi scris într-o formă finală teoria pe care o gândise în perioada 1934-1939. Apoi, aşa cum e bine cunoscut, avea să urmeze o perioadă istorică extrem de frământată care, cel puţin în România, nu s-a încheiat curând.

În timp ce Dan Barbilian preda şi reflecta asupra unor chestiuni de algebră la Universitatea Bucureşti, la celălalt capăt al lumii ideea lansată de el la Praga în 1934 suscita în continuare interes. Cel care avea să o repună în discuţie după război a fost Paul Joseph Kelly. Născut în 1915 în Riverside, California, Kelly şi-a susţinut teza de doctorat în 1942 la University of Wisconsin – Madison, apoi, vreme de trei ani, a fost locotenent în forţele aeriene ale Statelor Unite. După război, a devenit profesor la University of California – Santa Barbara, de unde s-a pensionat abia în 1982 şi unde, începând cu 1957, a deţinut pentru câţiva ani poziţia de şef al Departamentului de Matematică. În perioada când a fost interesat de spaţiile Barbilian, Kelly a scris, între altele, articolul „Barbilian geometry and the Poincaré model”, apărut în *American Mathematical Monthly*, în numărul din mai 1954. Articolul lui Kelly începe astfel: „Într-o foarte scurtă lucrare din *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* (1934-1935), D. Barbilian defineşte o clasă de spaţii

metrice (pe care le vom numi spaţii Barbilian) şi enunţă câteva dintre proprietăţile lor. […] Ni se pare că abordarea lui Barbilian asupra modelului Poincaré are anumite avantaje de simplitate şi generalitate”. Acest comentariu se referă la lucrarea prezentată în congresul de la Praga, care îşi păstra interesul şi la 20 de ani de la momentul scrierii. Se dovedeşte astfel forţa ideii lui Barbilian din 1934. Generalizarea respectivă era de interes şi era greu de depăşit, ca amplitudine a construcţiei, chiar şi la două decenii distanţă. *Monthly* este, probabil, una dintre cele mai răspândite şi vizibile publicaţii din lume, în 1954 ca şi acum, iar apariţia articolului lui Kelly trebuie că a readus subiectul în sfera de interes a momentului.

Recenzia din *Mathematical Reviews* a articolului lui Kelly avea să fie scrisă de Blumenthal. La Bucureşti, Dan Barbilian află de articolul lui Kelly din *Monthly* şi vestea trebuie să-l fi impresionat. Îşi dă seama că ceea ce obţinuse el reprezenta un pas mai departe în arhitectura teoriei şi asta-l determină să scrie teoria într-o formă publicabilă.

În ultimii trei ani ai vieţii, D. Barbilian avea să scrie patru lucrări de geometrie dedicate acestui subiect. Prima dintre ele se numeşte „Asupra unui principiu de metrizare” şi a apărut în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 10 (1959). În partea de introducere a lucrării, Dan Barbilian prezintă întreaga istorie a acestor idei, văzută dintr-o perspectivă proprie. El spune: „Se va vedea că punctul de vedere al generalizării din 1934 poate fi cu mult depăşit. Ne găsim în faţa unui procedeu foarte general de metrizare, prin care funcţiile pozitive de două puncte (aşa-numitele «distanţe generale»), pe anumite mulţimi, pot fi rafinate până la o distanţă”. Continuă să scrie în română şi toate articolele sunt direcţionate către revista *Studii şi cercetări*. Cu toate acestea, mesajul ajunge la destinaţie, adică la cei care puteau înţelege substanţa matematică a acestor cercetări, căci articolele din *Studii şi cercetări matematice* erau recenzate de referenţii care scriau pentru *Mathematical Reviews.* Cel care avea să fie invitat să scrie

recenzia pentru articolul „Asupra unui principiu de metrizare” este tot L.M. Blumenthal, care s-a aflat în faţa articolului scris în română. În recenzie, el avea să consemneze, între altele: „Lucrarea de faţă extinde pe larg această procedură de metrizare şi investighează în detaliu spaţiul rezultat”. Acest detaliu este important pentru că oferă o confirmare din momentul respectiv asupra originalităţii şi valorii teoriei. În plus, Blumenthal confirmă caracterul de generalizare al construcţiei lui Barbilian din 1959.

Aveau să urmeze articolele „Fundamentele metricilor abstracte ale lui Poincaré şi Carathéodory ca aplicaţie a unui principiu general de metrizare” (lucrare prezentată la Institutul de Matematică în data de 4 iunie 1959), apărut în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 10 (1959); „J-metricile naturale finsleriene”, apărut în aceeaşi revistă în vol. 11 (1960); şi lucrarea scrisă împreună cu Nicolae Radu şi apărută postum „J-metricile naturale finsleriene şi funcţia de reprezentare a lui Riemann”, publicată tot în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 12 (1962). Ultima lucrare a fost depusă la redacţie de Nicolae Radu pe 20 octombrie 1961; Barbilian se stinsese pe 11 august, în acelaşi an.

În 1981, P.J. Kelly a publicat la Springer Verlag un manual de geometrie neeuclidiană împreună cu Gordon Matthews (de la California State University, Long Beach), volum care se încheie cu un capitol dedicat spaţiilor Barbilian. Acest capitol e de o claritate remarcabilă şi demonstrează că, în mâna unui educator inteligent, construcţia procedurii de metrizare a lui Barbilian poate deveni un instrument didactic extrem de util în ilustrarea geometriilor neeuclidene. În fond, e vorba despre o teorie pe care Barbilian a construit-o generalizând o observaţie dintr-un model de geometrie hiperbolică; de ce nu s-ar studia acest subiect la cursuri unde oricum se studiază geometria hiperbolică?

Pentru Barbilian, adâncirea studiului unor modele ale geometriei hiperbolice fusese „gestul închis” ce „rezuma”

un fenomen vizibil în discul unitate. O bună măsură a profunzimii acestei construcţii o reprezintă perenitatea ei şi faptul că ea a reapărut într-o altă ramură a matematicii, mai precis în analiză. Pentru că istoria receptării procedurii de metrizare nu se încheie nici pe departe aici. Lucrarea din 1934 a revenit în ultimii ani în atenţia cercetătorilor, în special după ce, în 1995, Alan F. Beardon (de la University of Cambridge) a redescoperit independent rezultatul din 1934 şi a reuşit o generalizare a lui. În 1998, F.W. Gehring (de la University of Michigan, Ann Arbor) şi K. Hag (de la Universitatea Norvegiană de Ştiinţă şi Tehnologie) au continuat ideea lui Beardon, citând ca punct de plecare construcţia lui Barbilian din 1934 (lucrarea lor a apărut în 2000). De atunci, lucrarea lui Barbilian de la Praga a fost citată de mai multe ori de Peter Hästö (de la Universitatea din Oulu, Finlanda), Zair Ibragimov3 (între altele, în teza sa de doctorat de la University of Michigan, Ann Arbor, din 2002) şi de alţi autori în cursul studiului lor asupra metricilor apolloniene. E vorba de citări semnificative, în reviste cu impact ştiinţific important. O monografie mai cuprinzătoare asupra subiectului, *Hyperbolic Geometry and Barbilian Spaces*, a apărut în 1996 sub semnătura lui Wladimir G. Boskoff, la Hadronic Press4. Există, desigur, şi alte contribuţii recente asupra acestei probleme, însă nu ne propunem să le amintim pe toate aici. Oricum, ceea ce ne-am dorit să prezentăm este evoluţia ideii de spaţiu Barbilian, precum şi perenitatea interesului pentru creaţia din aria geometriei a lui Barbilian din perioadele 1934-1939 şi 1959-1961.

Important este următorul lucru, care nu este probabil suficient de cunoscut, nici suficient explicat. Geometria pe care o studiem noi, cu toţii, în şcoala elementară este geometria euclidiană, cea în care suma unghiurilor unui triunghi este de 180 de grade, iar printr-un punct fix exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă. În geometria sferică, unde dreptele sunt

cercurile mari, aşa cum e de pildă ecuatorul sau cum sunt meridianele, suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180 de grade şi mai mică de 270 de grade. Printr-un punct exterior unei drepte, pe sferă nu se poate duce nicio paralelă. În geometria hiperbolică, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce o infinitate de drepte nesecante unei drepte date. Suma unghiurilor unui triunghi în planul hiperbolic este mai mică strict de 180 de grade, putându-se apropia de 0 grade. Aceste geometrii diferite pot fi construite enunţând un set de axiome. Prima construcţie impecabilă din punct de vedere logic în domeniul fundamentelor geometriei a fost realizată de David Hilbert, în perioada 1893-1902; iar Barbilian a ţinut să urmeze cursurile lui David Hilbert după 1921, în Germania. Partea extrem de importantă a construcţiei lui Barbilian e că pentru o alegere specială, nu tocmai evidentă, a elementelor constitutive ale procedurii de metrizare se obţin cazuri particulare de geometrii remarcabile. Între acestea se află geometria hiperbolică, geometria sferică şi geometria euclidiană. Astfel, toate aceste geometrii pot fi privite ca nişte cazuri particulare de spaţii Barbilian, înzestrate cu o metrică de tip oscilaţie logaritmică5.

Semnificaţia acestui rezultat e uriaşă. Nu există prea multe proceduri *unificatoare* în geometrie. Într-un volum recent de geometrie riemanniană, Peter Petersen menţionează ca proceduri unificatoare *transformarea conformă* şi *warped products*. Oscilaţia logaritmică este, din punctul de vedere al fundamentelor geometriei, cel puţin la fel de importantă ca şi celelalte două, iar aceste trei procese sunt singurele care pot produce cele trei geometrii diferite pentru suprafeţe (adică: sferică, hiperbolică şi euclidiană).

Altfel spus, procedura de metrizare este un principiu care cuprinde şi precedă, în sensul fundamentelor, conţinutul axiomatic al diverselor geometrii. Asta vor fi încercat oare să sugereze Kelly şi Matthews atunci când şi-au încheiat manualul din 1981 cu un astfel de capitol? Neîndoielnic, da. Barbilian ştia foarte bine că ideea

procedurii sale de metrizare generează, pentru diferite alegeri ale mulţimilor-cadru şi ale aşa-numitei funcţii influenţă, o multitudine de geometrii diferite. Ideea fusese folosită şi exploatată în articolele din 1959-1962, dar nu în articolul din 1934, care nu a consemnat decât prima idee. Barbilian ştia foarte bine că descoperise un concept unificator, important pentru ordinea geometrică a lucrurilor.

Receptarea ideii procedurii de metrizare a lui Barbilian şi numeroasele ei citări nu fac decât să dea seama de măsura reuşitei matematice a acestei construcţii. În acest sens, Barbilian a izbutit punerea în evidenţă a unui principiu unificator. Astfel, ideea care părea doar sugerată într-un poem este de fapt materializată printr-o construcţie. Nu e vorba doar de o dorinţă poetică, ci de exprimarea în poem a unui gând care s-a putut materializa în geometrie. Şi era un gând care provine din filosofia Programului de la Erlangen, care tocmai spre identificarea unor astfel de proceduri unificatoare îndemna.

Să mergem mai departe şi să explorăm semnificaţia acestei construcţii.

Pentru aceasta, să ne întoarcem în 1940. Atunci când se pregătea pentru obţinerea unei promovări universitare, Dan Barbilian a scris un text intitulat *Notă asupra lucrărilor ştiinţifice*. Acest material conţine o prefaţă intitulată „Formaţiunea matematică” şi este unul dintre cele mai relevante texte pentru înţelegerea viziunii integratoare a autorului asupra unor domenii diferite ale creaţiei aşa cum sunt matematica şi poezia. Analogia e descrisă în termenii „desăvârşirii figurii armonioase a lumii”, o idee care nu e departe de temele centrale ale liricii lui Ion Barbu, precum cea din poemul *Grup.*

Ideea importantă, foarte bine subliniată în acest text din 1940 într-o formă pe care nu am găsit-o exprimată la fel de clar altundeva, e aceea că matematicile contribuie la constituirea unui „eclectism luminat” pe care Barbilian nu ezită să-l descrie drept „umanismul cel nou”. Ce înseamnă oare acest umanism? Ce avea el oare în vedere? Pentru a

reprezenta despărţirea lui de profesorul Landau, pe care îl considerase ca posibil conducător de doctorat, Barbilian scrie că teoria numerelor, „aşa cum o concepea Landau”, este nici mai mult, nici mai puţin decât „o întrecere de formule de evaluare asimptotică”. Ceea ce căuta el în matematici era altceva, o viziune pe care această „întrecere de formule” era departe de a o satisface. Ceea ce Barbilian invocă în 1940 e un lucru nu lipsit de oarecare spectaculozitate: „universul moral al conceptelor”, cel care ar asigura unitatea de puncte de vedere asupra unor domenii diferite. Iată cel mai relevant pasaj din lucrarea publicată în 1940:

„Personal mă consider un reprezentat al Programului de la Erlangen, al acelei mişcări de idei care, în ceea ce priveşte întinderea consecinţelor şi răsturnarea punctelor de vedere, poate fi asemuit Discursului Metodei sau Reformei înseşi. Specializării strâmte ori tehnicităţii opace, de dinainte de Erlangen, se substituie un eclectism luminat. El continuă adâncirea fiecărei teorii în parte, fără să piardă din vedere omogenitatea şi unitatea întregului. Astfel, cercetarea matematică majoră primeşte o organizare şi orientare învecinate cu aceea a funcţiunii poetice, care, apropiind prin metaforă elemente disjuncte, desfăşură structura identică a universului sensibil. La fel, prin fundarea axiomatică sau grupal-teoretică, matematicele asimilează doctrinele diverse şi slujesc scopului ridicat de a instrui de unitatea universului moral al conceptelor. În acest chip ele încetează de a mai fi o laborioasă barbarie, ci, participând la desăvârşirea figurii armonioase a lumii, devin umanismul cel nou”.

În acest pasaj e descris întregul interes teoretic al lui Dan Barbilian pentru fundamentele geometriei şi pentru cercetările din domeniul algebrei. Pentru el, demn de interes în matematici nu e aspectul calculatoriu, „laborioasa barbarie”, ci „învingerea dificultăţilor” (cum scrie el altundeva) în sens strict teoretic, adică obţinerea

unui principiu unificator, ridicarea la nivel de concept, construcţia care cuprinde, precum faţetele unuia şi aceluiaşi fenomen, mai multe manifestări diverse. Astfel, în spatele calculelor se află principiul, în spatele labirintului de tehnicalităţi se află cheia care declanşează mecanismul generativ al unui spaţiu, al unei geometrii. O astfel de construcţie a fost materializată în cele patru substanţiale lucrări dedicate procedurii de metrizare din perioada finală a vieţii lui Barbilian. Ideea nu e diferită dacă e exprimată astfel: „Poetul ridică însumarea/ De harfe răsfirate ce-n zbor invers le pierzi/ Şi cântec istoveşte […]”. Acest pasaj ni se pare a fi o descriere explicită a viziunii unificatoare, a căutării principiului ultim, fundamental. Din acest unghi, poezia apare drept o cale de cunoaştere, de cuprindere a esenţialului, de eliminare a balastului, a ceea ce este tehnic, repetitiv, nenecesar, inutil, „laborioasă barbarie”. Iar *Joc secund*, volumul, e însoţit de un motto de Stéphane Mallarmé: „ne fût-ce que pour vous en donner *l'idée*”. Sublinierea cuvântului *l'idée* îi aparţine lui Barbilian, şi pare a sugera aici principiul generator, cel care conţine cheia, taina întregului. Poezia cuprinsă în volumul *Joc secund* reprezintă aşadar enunţul unui principiu poetic, un cadru general de recunoaştere a poeziei ca mijoc de explorare şi de înţelegere a lumii. Ni se pare că ideea depăşirii tehnicităţii e faptul descris prin „tăierea cirezilor agreste”, iar viziunea odată cucerită prin realizarea unei construcţii cuprinzătoare e descrisă printr-o „intrare în mântuit azur”. Iar „grupurile apei” sunt menite a sugera elementele care rămân neschimbate odată ce este obţinută construcţia generalizatoare. Iată strofa integral: „Din ceas dedus, adâncul acestei calme creste, / Intrată prin oglindă în mântuit azur, / Tăind pe înecarea cirezilor agreste, / În grupurile apei, un joc secund, mai pur”. Atunci când scrisese aceste versuri, Barbilian nu ştia că în câţiva ani va realiza o construcţie de un asemenea impact ştiinţific şi de o asemenea profunzime. Totuşi, opţiunea lui ştiinţifică în matematici era bine definită. Ştim că îşi exprimase cu asupra de măsură dispreţul pentru

excesiva tehnicalitate care nu duce la principiu şi aprecierea pentru demersurile care spun ceva, care adâncesc în sens calitativ viziunea cuprinzătoare asupra lumii. Într-un fel, eroarea umană fundamentală ar fi, pare el să ne sugereze, aceea de a nu vedea, de a nu pricepe esenţialul, atunci când acesta ar fi totuşi accesibil. Sau, exprimând această idee interogativ, în poemul *Grup*, ideea pierderii în tehnicalitate, în rutină, lăsând în deficienţă înţelegerea principiului, se poate descrie astfel: „Atâtea clăile de fire stângi! / Găsi-vor gest închis, să le rezume, / Să nege, dreaptă, linia ce frângi: / Ochi în virgin triunghi tăiat spre lume?”. Linia frântă să fie oare drumul cel mai scurt din vreun model de geometrie neeuclidiană? Să fie oare surprinzătoarele geodezice din modelele hiperbolice?

Cum a urmărit Barbilian această idee vreme de decenii se poate vedea şi dacă amintim aici una dintre cele mai controversate intervenţii literare pe care ne-a lăsat-o. Sunt cunoscute polemicile în care Dan Barbilian a intrat în epocă. Să reamintim aici cum a citit şi comentat poezia lui Tudor Arghezi, într-o intervenţie cu accente voit îngroşate: „Domnul Arghezi face poezii cu inocenta aplicaţiune spre migală a unui ceasornicar. Câteodată trece şi la bardă. O poartă ţărănească cu vopseli târgoveţe ia fiinţă. Alteori, travestit în brodeuză, ia acul, foarfecele şi lucrează olandă *à jour*. Toate acestea sunt foarte bune deprinderi călugăreşti. Dar parfumurile duhovniceştilor virtuţi le bănuim irevocabil mistuite. Ne găsim în prezenţa banală a unui poet fără mesaj, respins de Idee; ca altădată, de macerările vieţii schimniceşti”. Şi încă, în acelaşi text, mai dur: „Şi, iată, atingem culpa originară a poeziei lui Arghezi, principiul de osândă pe care îl închide. *E o poezie castrată.* Atributul clar al ideii a fost smuls. Vagi funcţii feminine o tulbură. Şi atunci se întoarce sau se epuizează în spume de injurii. Cel mai adesea împleteşte, palidă şi moscovită, plesne şi cozi la versuri. Plasticitatea masei ei verbale merge până a se turna în grele maşini teologice, parodii de sfinte mistere. Dar viaţa tremurată a artei, marea linie, marea intensitate, e departe de această

impură industrie”.

Dacă astfel de observaţii ar fi venit din partea cuiva care n-ar fi întreprins demersuri de esenţializare a conceptelor, am putea crede că ne aflăm în faţa unei simple calomnii cu substrat personal, şi Barbilian nu a fost lipsit de astfel de ieşiri. Atunci când i se cere să se confrunte cu o lume atât de plină de idei precum este lumea invarianţilor geometrici, poezia lui Arghezi se vede altfel decât, de pildă, atunci când e supusă privirii critice a lui Eugen Ionescu, în *Nu*, sau fie şi coborâtă sub tirul de apăsătoare ironie la care o supun parodiile lui George Topârceanu. Poeziei i se pretinde să fie mai mult decât meşteşug, să acceadă la idee, să treacă de simpla sensibilitate şi potrivire, să ofere o viziune profundă.

În fond, despre asta era vorba, şi abia acum înţelegem substanţa reproşului. Lectura simultană din David Hilbert şi din Tudor Arghezi a produs această reacţie.

1. Terminologia pe care o adoptăm aici e sugerată de Jeremy Gray în *Plato’s Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

2. Parte dintre scrisori au fost publicate de Sorin Popescu în volumul *Fascinantul Ion Barbu (Dan Barbilian)*, Monitorul Oficial, 2008. Unele dintre schimburile epistolare sunt dezamăgitoare: nu se referă la geometrie, ci la politica Axei din acea perioadă.

3. Din 2007, Zair Ibragimov se află la California State University, Fullerton. În 2012 i-a fost decernat Premiul Internaţional Anassilaos în Matematici din partea Associazione Culturale Anassilaos, Italia.

4. Acest volum a fost distins cu un premiu al Academiei Române.

5. Acest rezultat apare pentru prima oară într-o lucrare scrisă de Wladimir Boskoff şi de mine, apărută în *Czechoslovak Mathematical Journal*; am ţinut să publicăm acest rezultat în aceeaşi revistă de matematică unde

Barbilian şi-a publicat contribuţia din 1934, pentru că *Czechoslovak Mathematical Journal* continuă tradiţia editorială a mai vechiului *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.*

Un exemplu de teorie al cărei timp se stinge

Geometria triunghiului a deţinut vreme de mai bine de un secol un rol regal. Pentru cei mai mulţi liceeni, acela a fost probabil primul teritoriu unde s-au întâlnit cu frumuseţea aridă a geometriei. Unii dintre ei au luat jocul în serios. Acum trei decenii, în România au apărut trei volume destinate publicului larg, scrise cu talent, umor şi bună inspiraţie de Viorel Gh. Vodă. În acele cărţi se amintea despre viaţa de altădată a *Gazetei matematice*, despre probleme de geometrie demodată, despre goana după puncte importante în triunghi.

Aminteam mai înainte că una dintre cărţile lui Viorel Gh. Vodă a fost prima carte din pricina căreia am făcut o noapte albă. Aveam 15 ani şi mi s-a părut la vremea respectivă cea mai interesantă lectură de la finele şcolii elementare. Mai târziu aveam să încep să citesc mai multă literatură de ficţiune şi atracţiile livreşti aveau să se diversifice, dar momentul când am descoperit geometria triunghiului a rămas o experienţă personală care m-a marcat. Cred că experienţa aceasta nu a fost deloc singulară pentru cei din generaţia mea. Mi-am început cariera de cititor graţie unei scurte monografii dedicate geometriei triunghiului. Puţin după aceea am început să particip la taberele de vară ale *Gazetei matematice* şi să scriu materiale care au apărut în paginile vechiului periodic de matematică.

Am fost surprins şi nu prea fericit atunci când am descoperit articolul lui Philip J. Davis (care a ieşit între timp la pensie de la Universitatea Brown) intitulat, cu o notă arhaică nu lipsită de subtilă ironie, „Înălţarea, căderea şi posibila transfigurare a geometriei triunghiului: o mini-istorie” 1. Vestea proastă era că acest articol, excelent argumentat, suna ca un prohod al unei întregi

discipline, cu aceeaşi notă de tristeţe implicită pe care o resimţim atunci când citim în *Stăpânul inelelor*, trilogia lui J.R.R. Tolkien, despre plecarea rasei elevilor către tărâmurile eternităţii. Cum adică, geometria triunghiului a ajuns la final? Ce să însemne asta? Să fie acesta articolul vreunui universitar care nu ştie ce spune? Ce are de spus un geometru crescut în tradiţia *Gazetei matematice* despre una ca asta?

Ei bine, profesorul Davis are dreptate. Actul de naştere al geometriei triunghiului e probabil lucrarea lui Leonhard Euler din 1765, în care se stabileşte coliniaritatea centrului de greutate, a ortocentrului şi a centrului cercului circumscris. Ar mai fi în triunghi un punct important, intersecţia bisectoarelor, care este totodată şi centrul cercului înscris în triunghi. În 1803, Kluegel a numit aceste patru puncte *merkwuerdige Punkte*, adică punctele remarcabile ale triunghiului. Ce e aşa de remarcabil în legătură cu ele? Adevărul e că faptul că trei drepte importante dintr-un triunghi oarecare se întâlnesc într-un punct este într-adevăr remarcabil, pentru că dacă cea de-a treia dreaptă n-ar fi trecut prin punctul de intersecţie al primelor două, n-am mai fi avut această proprietate de incidenţă. O teoremă importantă în istoria geometriei triunghiului a fost demonstrată în 1820 de Poncelet şi Brianchon: e vorba de aşa-numita problemă a cercului celor nouă puncte. În decursul istoriei, diverse alte puncte importante în triunghi au fost puse în evidenţă de matematicieni celebri, şi nu numai. Există o teoremă despre triunghiuri atribuită lui Napoleon. Există conice importante în triunghi, precum şi cercuri importante în triunghi. Există un punct al lui Torricelli, al lui Nagel, al lui Gergonne, punctele lui Brocard şi cercurile lui Brocard, şi aşa mai departe. La începutul veacului XX, la Universitatea Bucureşti exista un curs dedicat geometriei triunghiului. Clark Kimberling a scris un tratat dedicat elementelor geometrice importante în geometria triunghiului, iar Paul Yiu a avut în 2000 iniţiativa lansării unui jurnal electronic dedicat subiectului, un proiect care a interesat mulţi

autori2.

După mai mulţi autori, geometria triunghiului ca domeniu aparte s-a dezvoltat după 1870, atunci când E. Lemoine şi-a concentrat studiile asupra acestui subiect. Philip Davis, scriind despre autorii care au produs lucrări de amploare în acest domeniu, nu îşi poate reţine un zâmbet: „În momente de euforie, unii dintre aceşti autori priveau geometria triunghiului ca pe un nou şi împlinit Euclid, tot aşa cum despre Noul Testament s-a afirmat că e împlinirea Vechiului Testament”.

În zilele noastre însă, continuă Philip Davis, geometria triunghiului a devenit piesă de muzeu. El citează opinia lui E.T. Bell, care, încă din 1940, scria că „geometrii secolului XX au îndepărtat de mult toate aceste comori către muzeul geometriei, acolo unde praful istoriei repede le-a acoperit strălucirea”. Şi cu toate acestea, punctează mai departe Davis, iată geometria triunghiului în continuare prezentă în publicaţiile cu aură elementară, ca de pildă *American Mathematical Monthly*, *Mathematical Gazette* (el se referă la cea de la Londra, editată de Mathematical Association din Marea Britanie), *Crux Mathematicorum* şi altele. Cred că Davis are multă dreptate atunci când spune că „matematicienii ar putea să se joace de acum cu aceste probleme ca şi cum ar fi o sursă de relaxare; ei ar putea chiar să resimtă o intensă satisfacţie, dar probabil n-ar vrea să-şi vadă reputaţia profesională judecată pe baza unei contribuţii de acest fel”.

Cum de a fost posibil un asemenea fenomen? Ne interesează, de fapt, aspectul simptomatic în câmpul culturii: când are loc dispariţia unui întreg capitol al unui domeniu? Când se mută o întreagă direcţie de cercetare din aria activă direct în muzeul domeniului? Şi de ce considerăm că un alt capitol, oarecum învecinat, precum axiomatica, fundamentele geometriei, are mare potenţial pentru educaţie, în timp ce geometria triunghiului, care e atât de spectaculoasă, nu se află într-o situaţie similară? Ce anume face diferenţa?

De fapt, într-un anume sens putem admite că geometria triunghiului şi-a epuizat resursele. Suntem gata să acceptăm această critică şi să admitem că un capitol pasionant al geometriei demodate aparţine trecutului. Dar ce ar putea însemna în general că o teorie şi-a epuizat resursele? Să încercăm să extragem de aici o concluzie pentru întreaga arhitectură a ştiinţei. E oare vorba de problemele de cercetare din capitolul respectiv? Ar fi ideal dacă, de exemplu, medicina şi-ar epuiza problemele. Cum ar fi să rezolve şi medicii problema cancerului, a maladiei SIDA, a altor maladii în prezent incurabile? Privim geometria triunghiului şi visăm: aşa ar trebui să arate lucrurile în mod ideal în evoluţia unui domeniu ştiinţific. Adică pentru o vreme să existe probleme greu de rezolvat, care să suscite pasiune şi dedicaţie, şi apoi să putem spune: iată, toate problemele interesante au fost rezolvate, deci din punctul de vedere al cercetării domeniul e de acum numai bun de pus în vitrina unui muzeu.

Da, dar oare nu se poate spune acelaşi lucru şi despre filosofie? Nu s-ar putea spune acelaşi lucru şi despre alte capitole ale ştiinţelor umane? E oare destinul geometriei triunghiului simptomatic şi pentru alte domenii?

Să ne întoarcem la lucrarea lui Davis ca să amintim *motivele* enumerate de el pentru care geometria triunghiului ar fi murit. Poate că în această listă de motive se află răspunsul. Ne interesează aceste raţiuni nu doar pentru domeniul respectiv, ci pentru a vedea câte dintre ele se extind, de fapt, şi la alte capitole ale ştiinţelor sau ale vieţii academice.

Motivele enumerate de el pentru stingerea geometriei triunghiului sunt următoarele:

„(1) Percepţia că subiectul e în parte elementar, la un nivel «amator», sau de natura matematicilor recreaţionale şi, în consecinţă, este de statut profesional scăzut. Subiectul nu este «adânc». La nivelul psihologiei profesionale există sentimentul că şi în cazul în care

demonstraţia unei afirmaţii nu ar fi numaidecât transparentă sau clară, am putea oricând să «intrăm cu buldozerul» şi să completăm demonstraţia folosind geometria analitică. Şi atunci, de ce să ne mai batem capul? […]

(2) S-a ajuns la epuizarea internă a interesului şi a varietăţii posibilităţilor teoretice şi metodologice. […] N-au apărut probleme noi, extraordinare, pentru mult timp nerezolvate, care să captiveze imaginaţia şi să provoace inteligenţa matematică aşa cum s-a întâmplat cu faimoasa listă de probleme a lui Hilbert. Altfel spus, n-au apărut idei noi în geometria triunghiului. […]

(3) Cele mai «adânci» rezultate din geometria triunghiului dovedesc o complexitate vizuală crescândă […]3.

(4) Există punctul de vedere apărut la finele secolului al XIX-lea, care a scăzut în mod serios rolul vizualului în favoarea algebricului şi a simbolicului.

(5) Susceptibilitatea sentimentului de surpriză are părţile ei bune, dar şi părţile ei rele. (Vai! Oare aceste trei drepte se intersectează în unul şi acelaşi punct? Cine s-ar fi aşteptat la asta?) Dar profesioniştii sunt expuşi la mult prea multe teoreme şi mult prea multe surprize. Astfel, surpriza este cumva atenuată şi redusă, iar importanţa ei psihologică pierde din valoare, lăsând loc plictiselii.

(6) Reatribuirea sau migrarea unei părţi a conţinutului geometriei triunghiului către alte domenii tradiţionale sau nou-apărute. De exemplu, faimoasa teoremă a lui Desargues despre două triunghiuri în perspectivă e privită azi ca fiind parte a geometriei proiective. Alte teoreme sunt privite ca fiind parte a geometriei transformării inverse sau a geometriei algebrice.

(7) O sărăcie a legăturilor sau aplicaţiilor considerate ca fiind «vii»; în particular, a conexiunilor cu domenii precum fizica etc. […]

(8) Concurenţa tot mai puternică după al Doilea Război Mondial din partea altor arii ale geometriei, deseori

cu o solidă componentă vizuală sau cu pretenţii de mai largă aplicabilitate, ca de exemplu geometria convexă, teoria grupurilor şi simetriei, teoria pavajelor, teoria fractalilor, geometria computaţională etc”.

Acesta a fost citatul din lucrarea lui Philip Davis.

Pentru noi însă geometria triunghiului e un *caz*, numai bun de studiat în domeniul istoriei ştiinţelor. Vreme de mai bine de o sută de ani a existat un anumit stil de a face geometrie, de a studia planul euclidian, de a trăi cu sincer interes problemele ivite acolo, şi apoi acel stil s-a stins. În toată povestea asta e ceva asemănător destinului piramidelor maya sau al statuilor abandonate în Insula Paştelui: în vechime cineva a creat monumentele, dar azi nimeni nu mai continuă acel stil de viaţă, deşi monumentele respective ne impresionează. În cazul nostru, deşi mai există încă practicanţi, deşi mai există supravieţuitori, oameni care sunt atraşi sau fascinaţi de acest domeniu, nu se poate ca la o atentă analiză să nu-i dăm dreptate lui Philip Davis la toate cele opt puncte. Mai mult, cele opt motive amintite mai sus ar putea admite extensii şi echivalenţe şi către alte domenii. Sunt tot atâtea simboluri ale decadenţei unui domeniu, ale unei arii care se stinge. Vedem că ceea ce face ca anumite domenii să rămână vii şi de interes sunt problemele deschise din respectivele domenii. Cu alte cuvinte, viaţa unui domeniu e dată de conjecturile, provocările, construcţiile, deschiderile către alte domenii sau către aplicaţii şi, nu în ultimul rând, de atingerea vieţii reale. În absenţa acestora, un domeniu se practică doar în spiritul „artei pentru artă”.

Avem aşadar în geometria triunghiului istoria unui trib pe cale de dispariţie. Te poţi apropia de el cu interes şi dragoste. Pentru mine, experienţa mea a depins de acest fel de a face matematică: pe aici am intrat într-un teritoriu secret. Am faţă de acest subiect o înţelegere dublată de nostalgie. Mai mult, sunt profund îndatorat intelectual unor geometri care s-au format la rândul lor la şcoala geometriei triunghiului, de la Euler până la Ţiţeica şi

Barbilian. Dar asta nu înseamnă că nu pot evalua situaţia în momentul cultural de azi.

Dacă ar fi să schiţăm aici programa şcolară a unui liceu ideal, nu aş susţine niciodată întoarcerea la geometria triunghului pentru acel nivel de educaţie. Aria respectivă, tocmai pentru că nu aduce deschideri, nu ar fi candidatul ideal pentru o selecţie de subiecte şi domenii care s-ar anunţa încărcată. Geometria triunghiului e ceva net diferit de axiomatică, de fundamentele geometriei. Axiomatica e menită să educe calitatea de a raţiona şi, tocmai prin aceasta, are un caracter de generalitate care atinge esenţialul. Importanţa axiomaticii, a acelei componente a geometriei izvorâte din studiile lui Hilbert şi Birkhoff, e cu mult mai mare, pentru că include acel eşafodaj logic pe care numai fundamentele geometriei îl au. Geometria triunghiului e altceva, e un frumos obiect de muzeu. Că l-am iubit cândva e cel mult un detaliu de biografie sentimentală.

*

Pe măsură ce înaintam în studiul acestor lucruri, mi s-a părut că poezia care se scrie azi e *prea facilă.* Mi s-a părut că oricine poate pune laolaltă câteva pagini de momente de raritate4, că oricine poate da naştere unei plachete de poeme. Atunci când ţi se întâmplă să aşezi poezia faţă în faţă cu rigorile formei, ale spaţiului, ale conceptelor reci care explică structura lumii, parcă simţi nevoia de ceva mai mult, de ceva care să meargă direct la adevărul brut al lucrurilor. Ceva care în trei versuri să atingă exact esenţa. Cu cât făceam mai multă matematică, cu atât îl apreciam mai mult pe Cioran, cel din *De l'inconvénient d'être né*, sau pe Borges, cel din perioada finală, pentru că acolo găseam texte care, într-o formulare de maximă sinteză, atingeau esenţialul… Problema mea ajunsese să fie nu poezia, ca gen literar, ci poezia care mi se părea uşor de fabricat, dar care nu spunea atât de mult cât ar fi putut spune. Dacă un poem nu-mi oferă o lume parcă născută din nimic, precum planul geometriei lui Bolyai, atunci nu mă interesează. Mă interesează în schimb

poezia care surprinde esenţialul, care dezvăluie întreaga cuprindere a unei drame, a unei tragedii, a condiţiei umane. Mă interesează formulările care stilizează la fel de mult cât a izbutit Hilbert atunci când a pus în evidenţă „atomii” unei teorii. Nu mă interesează efectele repetitive, miza pe surpriza-care-nu-e-de-fapt-surpriză.

*

Philip Davis scria că geometria triunghiului a migrat spre alte domenii. La fel cum şi teme care iniţial ţineau de filosofie au migrat spre alte domenii, către arii ale ştiinţelor, de exemplu. Însă geometria triunghiului parcă ar fi dispărut sub o aură misterioasă. Una dintre transfigurările ei ţine de miracol şi merită povestită aici. Viziunea se datorează unui matematician născut în 1930, a cărui copilărie s-a aflat sub semnul nefericitei vânători de duşmani ai poporului declanşate sub Stalin: Victor A. Toponogov. După ce şi-a terminat liceul în 1948, Toponogov a studiat matematica la Tomsk, unde a absolvit în 1953. Nu era clar deloc dacă îşi va putea urma doctoratul, din pricina dificultăţilor de dosar. După moartea lui Stalin, şi-a putut continua doctoratul, iar în 1956 s-a mutat la Novosibirsk, unde a devenit cercetător la Institutul de Radio-Fizică şi Electronică. Pe când lucra acolo, şi-a susţinut teza de doctorat la Universitatea de Stat din Moscova, în 1958. În teză, el a reevaluat o idee a lui A.D. Aleksandrov şi a extins-o la spaţii riemanniene. Astăzi, teorema aceea e numită teorema de comparaţie a lui Toponogov şi a dat naştere unui domeniu în plină efervescenţă: geometria comparaţiei.

Ideea este de a compara configuraţii geometrice fundamentale din spaţii abstracte cu aceleaşi configuraţii retrasate pe sfere.

Să pornim de la o suprafaţă arbitrară, de exemplu de la suprafaţa unei statui celebre. Să ni-l imaginăm pe *David* al lui Michelangelo înscris într-o sferă. Îi vom compara forma cu cea a sferei care-l circumscrie. Dacă vrem să urmărim ceea ce se petrece pe suprafeţe sau în spaţiile riemanniene, trebuie să-i găsim fiecărui obiect geometric

spaţiul său de comparaţie. Sfera care îl circumscrie e un bun cadru de referinţă.

Pentru aceasta, să considerăm doar acele curbe de pe suprafaţa pe care o studiem care reprezintă *drumul cel mai scurt* între două puncte date. Să ne imaginăm acum un triunghi compus din astfel de laturi. Limbajul matematic are un nume şi pentru aşa ceva: obiectul acesta se numeşte *triunghi geodezic.*

Dacă curbura unei suprafeţe oarecare nu e mai mică decât un număr oarecare fixat *k*, atunci e firesc să comparăm unghiurile din orice triunghi de pe suprafaţă cu unghiurile unui triunghi geodezic dintr-un spaţiu de curbură constantă *k.* Este ca şi cum am compara triunghiul nostru cu un triunghi de pe o sferă de rază egală cu inversul rădăcinii pătrate a lui *k.* Vom numi această sferă cu care comparăm totul un *spaţiu de comparaţie*. Ei bine, una dintre teoremele importante în domeniu spune că unghiurile unui astfel de triunghi nu vor fi niciodată mai mici decât unghiurile corespunzătoare în triunghiul geodezic din spaţiul de comparaţie.

Sunt mai multe astfel de teoreme de comparaţie, a căror demonstraţie include elemente de geometrie demodată, laolaltă cu analiză matematică de înaltă rigoare. Lucrurile nu sunt deloc simple, iar demonstraţiile nu sunt triviale. Ideea a fost studiată iniţial de Élie Cartan, apoi de A.D. Aleksandrov, iar meritul lui Toponogov a fost de a fi dat acestei idei o haină de dimensiune arbitrară. Spaţiile a căror curbură e mărginită superior de *k* se numesc azi spaţii *CAT (k)*, de la numele celor trei cercetători care au deschis calea în acest domeniu: Cartan, Aleksandrov, Toponogov.

Am amintit acest exemplu pentru a ilustra transfigurarea. Iată aşadar că geometria demodată a triunghiului a migrat, aşa cum spunea Philip Davis, către un alt domeniu: către geometria comparaţiei, care e un capitol al geometriei riemanniene. Nu e vorba de o simplă trecere a modei sau de o schimbare a gusturilor, ci de o altă paradigmă.

1. Philip J. Davis, „The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History”, *The American Mathematical Monthly*, 102 (1995), 204-214.

2. E vorba de *Forum Geometricorum*, unde autorul acestor rânduri a publicat de patru ori.

3. Nu e nicio contradicţie între (2) şi (3).

4. În *Note pentru o mărturisire literară* (1932), Ion Barbu spune: „Poezia întocmai ca un fenomen fizic participă la misteriosul vieţii. Şi întocmai cum un fenomen fizic admite un model mecanic, tot aşa stările de raritate şi de vis ale poeziei pot fi reduse la un model raţional”.

O prezenţă: Laurenţiu Panaitopol

Există întâlniri memorabile care ne influenţează în mod esenţial, şi aş dori să amintesc aici o experienţă personală care nu ar putea fi descrisă altfel. Prima mea amintire asociază numele lui Laurenţiu Panaitopol nu unui chip, aşa cum se întâmplă în cazul întâlnirilor obişnuite, ci unei configuraţii geometrice. Semnătura lui se regăsea sub o problemă de olimpiadă de clasa a IX-a cu care m-am înfruntat într-o dimineaţă de martie. Ca orice începător, pe atunci nu-mi găseam calea în labirinturi. La următoarele întâlniri cu problemele atât de singulare şi de atent elaborate care purtau marca Laurenţiu Panaitopol am ieşit ceva mai bine. Dar nu problemele de olimpiadă sunt experienţa cea mai memorabilă legată de matematică din anii mei de liceu; partea mult mai interesantă era pregătirea propriu-zisă a olimpiadelor. Elevii bucureşteni beneficiau de un avantaj notabil: după faza judeţeană a olimpiadelor, celor calificaţi pentru faza finală le era propusă o pregătire sistematică la Universitate. În acest context m-am întâlnit prima dată cu L. Panaitopol, în sala de lângă Catedra de Algebră, de la etajul doi al Facultăţii de Matematică; a lucrat de mai multe ori cu cei cinci elevi de clasa a XI-a care aveau să reprezinte Bucureştiul la faza finală a olimpiadei de matematică din 1987, în şedinţe de câte două ore, cu aceeaşi grijă cu care l-am văzut mai

târziu prezentându-şi cursurile în faţa unor amfiteatre pline. Două lucruri m-au impresionat atunci: modestia lui şi extraordinara lui cultură de probleme de conţinut şi strategie singulară, probleme în care un matematician neavizat ar fi văzut doar cazuri particulare izolate. Era nu doar o adevărată enciclopedie, dar şi un rezolvator de mare perspicacitate.

După septembrie 1989, când am devenit student la Facultatea de Matematică din Bucureşti, ne-am întâlnit de câteva ori, dar nu în cadrul formal al lucrului la curs; odată ne-am întâlnit la sala de lectură, lângă colecţia revistei *American Mathematical Monthly*. Trei ani mai târziu am luat cursul (obligatoriu pe atunci) de *Metodica predării matematicii* pe care-l preda L. Panaitopol. A fost un curs neobişnuit, pregătit de un artizan al problemelor unice şi desfăşurat în cadrul academic în care calitatea profesorului se vedea cel mai bine. Astfel de cursuri, aveam să descopăr mai târziu, depind de cel care le predă şi, de fapt, nu pot fi predate de oricine. Cursul era constituit dintr-o colecţie de perle matematice aşezate într-o ordine narativă sugerată de dinamica tehnicilor de rezolvare sau potrivit logicii capitolelor discutate, totul expus la tablă cu o impecabilă organizare a prezentării şi cu o artă a retoricii egală cu a celor mai buni dintre matematicienii înzestraţi pentru asta (ca de exemplu dl Ieronim Mihăilă sau dl Solomon Marcus). Mi-a plăcut cursul acela şi pentru că exista o compatibilitate de viziune între cel care preda şi valorile pe care le căutam eu în matematici. În vara lui 1995, după ce am absolvit programul de master de geometrie, dl Panaitopol mi-a propus să susţin seminarul pentru cursul lui de metodică. În contextul acelor discuţii l-am întrebat ce înseamnă, de fapt, metodica predării matematicii şi ce anume ar trebui prezentat la acel curs (pe care îl ştiam deja). Mă interesa raţionamentul din spatele punctului de vedere care condusese la elaborarea cursului, aşa cum m-ar putea interesa momentul când unui romancier i-a venit ideea să scrie o anume carte. Mi-a răspuns că ideal ar fi să

prezentăm modele de expunere a unor subiecte fundamentale şi să le dublăm atât la curs, cât şi la seminar cu exemple care să ilustreze cât mai complet tehnicile de demonstraţie şi de raţionament întâlnite în fiecare capitol discutat. Fie că e vorba de combinatorică, de geometria triunghiului, de teoria numerelor sau de teoria grupurilor, fiecare dintre unităţile pe care le prezentăm studenţilor trebuie să fie o poveste rotundă, cât mai completă posibil, cu exemple aşezate în ordinea crescătoare a dificultăţii, care să introducă audienţa în subiect până la nivelul dorit de profunzime.

Te gândeşti dinainte unde vrei să ajungi, mi-a sugerat, apoi cauţi cele mai elocvente exemple care, în doar două ore de curs, să te poarte de la aspectul introductiv până la rezultatul dorit. Secretul unui curs perfect nu stătea aşadar în faptul că L. Panaitopol era un vorbitor desăvârşit, ajutat de o dicţie şi o prezenţă care şi-ar fi avut locul pe scenă, ci în elaborarea cursului, deloc banală şi care părea atât de naturală încât, după ce îl auzeai vorbind, ţi se părea că văzuse şi cea mai potrivită formă de a introduce, justifica şi expune subiectul respectiv. În toamna aceea mi-a povestit mai multe episoade din istoria lui personală, despre tatăl său, care fusese ofiţer în garda regală, precum şi despre originea interesului pe care-l avea pentru problemele elementare, pentru problemele de olimpiadă, între altele. În fapt, era vorba de acel interes autentic faţă de fundamentele matematicii care urma tradiţia practicată la Universitatea din Bucureşti de pe vremea lui Gh. Ţiţeica şi D. Barbilian. Astăzi înţeleg mai bine faptul că o idee poate să fie fundamentală fără a fi elementară şi, rememorând acel curs, înţeleg viziunea celui care-l concepuse şi care a generat atâtea cărţi şi manuale care sunt folosite şi azi în România. Dintr-o viziune ca aceasta au izvorât problemele create de Laurenţiu Panaitopol şi care au fost propuse de mai multe ori de România la olimpiadele internaţionale de matematică. E vorba de un matematician care a scris multe articole interesante; baza de date *Mathematical*

Reviews înregistrează pentru autorul L. Panaitopol un număr de 77 de articole. Dacă ar fi să aleg dintre toate acestea pe cel care îmi place cel mai mult, aş aminti aici articolul publicat în 1994 în *American Mathematical Monthly*, scris împreună cu dl Petru Mironescu (în prezent la Universitatea Claude Bernard Lyon 1), în care se demonstrează existenţa unui unic triunghi cu lungimile bisectoarelor date. Oricât de elementar ar părea enunţul, problema aceasta rămăsese deschisă cel puţin din 1875. Am văzut acea notă la un an de la apariţie şi soluţia mi s-a părut de o ingeniozitate care ţine de domeniul surprizei. Şi cine ar îndrăzni să spună că e simplă o demonstraţie care a eludat lumea matematicienilor vreme de mai bine de un veac?

Laurenţiu Panaitopol s-a stins în noiembrie 2008. Îmi amintesc de prezenţa lui ori de câte ori, pregătindu-mi cursurile, mă gândesc cum ar trebui prezentat studenţilor un pas dificil.

Povestind matematica în vremuri schimbătoare

Ştiam foarte bine cine este profesorul Solomon Marcus înainte să devin student al Facultăţii de Matematică bucureştene, în toamna anului 1989. Citisem *şocul matematicii* de cum a apărut şi tot atunci, cu doi ani înainte să devin student, citisem câteva capitole ale *Poeticii matematice*. Cursul nostru de analiză matematică din semestrul de toamnă al anului 1989 era programat în amfiteatrul „Simion Stoilow”, cel situat la etajul întâi al clădirii, pe colţul dintre Strada Academiei şi bulevard. Atunci când ne-a venit rândul, în prima săptămână a şcolii, am intrat în amfiteatru după o altă serie de studenţi, care tocmai încheiase un curs de algebră. Purtam cu noi entuziasmul oricărui început de drum. Eu m-am aşezat undeva către fundul sălii, de unde aveam o vedere de perspectivă asupra celor trei grupe, a celor 90 de studenţi care aveau să-mi fie colegi în următorii doi ani. O bună parte dintre ei îmi erau cunoscuţi: ne ştiam fie de la olimpiadele de matematică, fie de la taberele *Gazetei*

matematice, fie de la cercul de matematică din Bucureşti, pe care-l frecventasem vreme de doi ani.

Abia atunci când profesorul Solomon Marcus a intrat în amfiteatru s-a făcut linişte. A urcat pe podium, ne-a privit, ne-a salutat. Apoi ne-a spus că amfiteatrul nu este încă pregătit de curs, şi a zis asta arătând tabla care era acoperită de miriade de expresii algebrice rămase de la cursul precedent. Şi a adăugat că revine în cinci minute, lăsându-ne timp să ne pregătim pentru expunere. Imediat ce a părăsit amfiteatrul, câţiva dintre noi am venit la tablă şi am şters-o. Atunci când a revenit, cursul a putut începe. Cred că intrarea aceea în scenă a fost făcută sub forma unei clare definiri a ţinutei momentului, căci nu despre vanitate fusese vorba, ci despre necesara respectare a unor roluri şi a unui stil de a privi ceea ce însemna, de fapt, acel curs. În fond, noi reprezentam Universitatea Bucureşti, nu-i aşa? Astăzi, ştiind mai multe despre câte fapte matematice s-au întâmplat în ultima sută de ani în acel amfiteatru, înţeleg foarte bine ce încerca să ne comunice profesorul Solomon Marcus încă din primul minut. Se aştepta de la noi respect faţă de tradiţia Universităţii Bucureşti, faţă de ideea de curs, faţă de conţinutul ce urma să fie prezentat. Această idee de respect avea să domnească şi-n continuare, în fiecare nuanţă a cursului pe care l-am trăit cu maximă intensitate; în fapt, a fost cursul care m-a adus din fundul sălii, din locul retras unde mă izolasem în primele minute, undeva spre rândul doi, de unde voiam să văd şi să aud mai bine.

Era o clară diferenţă între ceea ce profesorul Solomon Marcus îşi propunea într-un curs destinat studenţilor de anul I şi ceea ce am văzut în decursul anilor la alţi profesori. Era o diferenţă de abordare şi de perspectivă. Să luăm de pildă faptul că fiecare teoremă era însoţită la curs de istoria ei, într-un stil care aminteşte de structura cărţii lui Dirk Struik *Lectures on Classical Differential Geometry*. Ca să faci aşa ceva ai nevoie de experienţă şi de erudiţie, iar la Universitatea Bucureşti nu s-au aflat, cel puţin pentru generaţia mea, decât doi

profesori care puteau susţine un demers de o asemenea amplitudine: Solomon Marcus şi Ieronim Mihăilă, ambii redutabili în erudiţie, familiarizaţi până la detaliu cu lucrul pe textele-sursă ale domeniului studiat. O asemenea prezentare ţine de tot ce are mai bun arta narativă. Nu poţi prezenta la curs istoria în manieră anecdotică, nu poţi trasa istoria ideilor în chip de notă de subsol; demersul trebuie să fie consistent şi sistematic, pentru a se înălţa până la nivelul unui discurs complementar filonului pur matematic. Abia atunci matematica şi istoria ideilor care o susţin pot fi prezentate în paralel şi pot transforma un simplu curs de anul I într-o experienţă formativă memorabilă.

Şi mai era ceva. Pe lângă perspectiva istorică asupra subiectului, cursul nostru de analiză matematică de anul I conţinea şi o deschidere spre cercetare pe care abia cursurile de anii IV sau V se încumetau s-o exploreze. Sunt multe cursuri, pretutindeni în lume, care nu prezintă studenţilor o perspectivă spre cercetare; dacă eşti atent şi bine informat, poţi face asta şi la cursuri de nivel introductiv. Imediat după ce prezenta câte o teoremă, profesorul Solomon Marcus menţiona: în legătură cu această chestiune, rămâne necunoscut faptul că… şi urma enunţul câte unei întrebări care-şi aştepta decriptarea. Jocul a început chiar din prima săptămână şi menţionarea problemelor deschise a continuat până la finele anului universitar, în iunie 1990. A fost un regal de probleme de cercetare. Prin opţiunea aceasta, cursul profesorului Solomon Marcus ne oferea tot ce avea mai bun tradiţia Universităţii Bucureşti: un spirit academic deschis spre munca de cercetare fundamentală, cu noutatea de excepţie că discursul acela era prezentat studenţilor de anul I. Căci era adevărat că rostul nostru era să păstrăm memoria informaţiei ştiinţifice, să învăţăm vechile teoreme, dar mai rămânea ceva. Matematica se face rezolvând probleme, avansând sistematic spre partea neştiută a teoriei, izolând-o de rest, pregătind abordarea teritoriului necunoscut cu suficient exerciţiu şi suficientă muncă de rutină menită să

antreneze experienţa necesară pentru descoperirea soluţiei. Cum să predai aşa ceva studenţilor? Cum să le transmiţi acea nevoie de explorare a teritoriilor dificile? Cum să transmiţi neliniştea de a continua o investigaţie? Profesorul Solomon Marcus propunea o soluţie precisă tuturor acestor întrebări prin filosofia implicită acelui curs, iar soluţia aceasta a fost de departe cel mai închegat curs introductiv într-un domeniu fundamental pe care l-am văzut vreodată (şi mi-am petrecut doisprezece ani ca student, luând cursuri întâi la Universitatea Bucureşti şi apoi la Michigan State University). Câţiva ani mai târziu am văzut un format similar într-un curs cu intenţie introductivă pe care profesorul David E. Blair îl prezenta studenţilor de la Michigan State University; din acel curs s-a născut volumul *Inversion Theory and Conformal Mapping* (publicat de American Mathematical Society în 2000), elaborat în jurul unor teme clasice şi încorporând discuţia pe text a unui articol al lui C. Carathéodory. Acest stil de a gândi un curs e rar. El izbuteşte să reunească nu doar cuprinderea istoriei temei, ci şi motivarea unor idei de cercetare actuale.

Am păstrat ideea aceasta în cursurile mele, cele pe care le prezint azi. Fie că predau fundamentele geometriei, geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor, calcul diferenţial cu mai multe variabile sau geometrie riemanniană, structura a ceea ce prezint la curs reprezintă o naturală combinaţie a ceea ce am văzut în cele mai bune cursuri pe care le-am urmat. Dar neîndoielnic, tiparul de bază al discursului meu de azi e inspirat de acel curs de introducere în analiza matematică pe care l-am urmat în anul universitar 1989-1990.

A fost un an intens, în care o lume veche s-a dărâmat şi o lume nouă a început să se închege. Îmi aduc aminte de manifestaţiile din Piaţa Universităţii, de venirile minerilor în Bucureşti. Contemporan atâtor evenimente tulburătoare care generau schimbări politice, cursul nostru de analiză matematică înainta ca un teritoriu ferm al certitudinilor şi

preciziei, antipodal agitaţiilor şi tensiunii sociale. Într-una dintre serile de primăvară din 1990 am participat la o manifestaţie în Piaţa Victoriei. Au fost câteva scene de controverse politice purtate în stradă, genul de episod pe care azi nu mi-l imaginez desfăşurându-se decât în iad. Seara, m-am întors acasă şi am continuat să citesc despre formulele lui Stokes şi Gauss-Ostrogradski. Treceam printr-o experienţă academică ce se convertea într-o profundă experienţă personală. Pentru mine, cel care studia în anul I la Universitatea Bucureşti, prilejul unor reflecţii asupra opţiunilor mele profesionale nu a fost dat de cursul de geometrie, nici de cel de algebră sau de fundamente ale informaticii, ci de cursul de analiză. Nu poţi trece printr-o asemenea experienţă universitară fără să-ţi pui problema sensului pe care-l au pe lumea asta şi efemeridele politice. Atunci când frământările politice sunt aşezate faţă în faţă cu momentele de consistenţă matematică ale trecutului, nu se poate să nu te întrebi care este locul tău între toate acestea. Cred că în toamna anului 1989 nu ştiam încă să gândesc. Abia interacţiunea mea cu tot ce avea mai bun Universitatea Bucureşti m-a învăţat asta şi m-a ajutat să aleg.

Nu e vorba doar de forma universului, ci şi de logica lui

„J’exigerais de ceux qui vont contre le train commun et les grandes règles qu’ils sussent plus que les autres, qu’ils eussent des raisons claires, et de ces arguments qui emportent conviction”.

Jean de La Bruyère, *Les Caractères*

Bine povestită, geometria poate arunca o lumină întregitoare asupra unei importante părţi a umanioarelor. Am întâlnit prima oară această idee în cartea lui Marvin Jay Greenberg *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, a cărei a treia ediţie (ajunsă la al optulea tiraj) mi s-a părut a fi una dintre cele mai frumoase cărţi de geometrie scrise vreodată[1]. Lucrarea era folosită ca manual pentru cursul de fundamentele

geometriei atunci când eu am devenit student la Michigan State, în 1996, şi ştiu că era folosită ca manual şi de multe alte cursuri similare din Statele Unite2. În prefaţă, Greenberg scrie: „Cartea mea a evoluat dintr-un curs de geometrie pentru arte liberale pe care l-am predat la University of California, Santa Cruz, la începutul anilor şaptezeci, când acel campus era pătruns de un idealism îmbucurător şi de experimentalism”. Greenberg deplânge faptul că sunt tot mai rare abordările interdisciplinare, cum ar fi de pildă cartea lui Ralph Abraham *Chaos, Gaia, Eros*. Astfel de abordări sugerează, în viziunea lui Greenberg, „o nevoie reală de a «umaniza» textele şi cursurile de matematică”. Fireşte că are dreptate şi că dorinţa aceasta e la fel de utilă azi cum era şi atunci când a fost scrisă prima versiune a cărţii sale. Sunt domenii întregi pentru care ar mai fi atâtea de făcut, în sensul explicării pe înţelesul oricui a rezultatelor teoretice importante obţinute. Geometria e la fel de importantă ca, de pildă, filosofia sau istoria, pentru că pe teritoriul acestei discipline putem trasa istoria unor teme care ţin de evoluţia logicii, alături de evoluţia viziunii noastre despre spaţiu şi timp. Şi asta nu e tot, pentru că Greenberg continuă cu o imagine a cursurilor pe care le ţinea şi care ne arată ce aplicaţii ar putea avea această viziune în domeniul educaţiei: „Când am predat calcul diferenţial recent, am fost uimit să văd cu cât mai plini de viaţă devin studenţii (în majoritatea lor nematematicieni) după ce au cercetat şi au scris eseuri despre istoria calculului diferenţial (mulţi erau fascinaţi de personalitatea lui Isaac Newton), despre relevanţa calculului diferenţial pentru domeniile lor şi despre teama lor faţă de acest subiect extraordinar”.

Chiar aşa. În fond, dacă ne e teamă de un subiect matematic, de ce anume ne-ar fi teamă? Poate de faptul că nu înţelegem calculele, că manipulările algebrice sunt obscure, că toate acele aşa-numite simplificări ale conceptelor ar putea fi în cele din urmă complicate. Dar în spatele oricărui calcul se află ideea, şi până la urmă asta e

tot ce contează[3]. În momentul în care vedem ideea, suntem pregătiţi şi să acceptăm un calcul mai puţin plăcut, numai de dragul ideii. Suntem gata să ne împăcăm cu etapele necesare ale tehnicalităţii, numai pentru a înţelege conceptul în toată profunzimea lui. Iar ideea respectivă poate foarte bine să nu fie relevantă doar în sens tehnic, ci şi într-un sens mai larg, „umanist”. În fond, în întreaga istorie a culturii, istoria geometriei are un avantaj neegalat de niciun alt domeniu: aduce imagini, figuri, configuraţii, ne permite să ne punem la lucru intuiţia şi să vedem. Bătălia pentru înţelegerea formei a fost un lung drum al culturii, început acum mai bine de două mii de ani.

Să ne întoarcem aşadar la cartea lui Greenberg. Ceea ce este extraordinar la o carte care serveşte în acelaşi timp şi ca manual e faptul că poate fi citită ca o lectură lejeră, tocmai pentru că e plină de informaţii istorice şi fapte reale. În acelaşi timp, joaca e serioasă: în volumul respectiv se studiază o versiune a sistemului axiomatic al lui David Hilbert. E o experienţă universitară plină de conţinut. Tăria textului nu constă în faptul că e plin de interesante divagaţii. Dacă ar fi numai atât, nici n-ar merita menţionat. Volumul se ridică la nivelul exigenţelor pe care orice cercetător din domeniu le-ar putea avea pentru o solidă introducere în axiomatică, dar ajunge şi la o extraordinară lizibilitate tocmai pentru că biografiile, faptele autentice, conexiunile între figurile importante ale trecutului sunt inserate în text în mod firesc, destinele se leagă de idei, ca în scrierile lui Plutarh. Şi am văzut: un astfel de text poate fi predat unor studenţi care nu sunt numaidecât matematicieni.

Nu-i aşa că e extraordinar un program universitar cu o asemenea deschidere interdisciplinară? Oare cum ar fi studiile în drept dacă cei care le-ar urma ar beneficia de un curs de logică incluzând şi aspecte de axiomatică, ceva care să educe, să pregătească pentru bătălia cu raţionamente dificile? Şi oare cât de mult ar beneficia studenţii de la istorie sau de la filosofie dacă ar trece prin experienţa textelor fundamentale ale geometriei, cele care

au trasat, vreme de secole, istoria celor mai mari neînţelegeri, dar şi a celor mai surprinzătoare iluminări?

*

Istoria matematicii atinge inevitabil aspecte tehnice, calculatorii, şi nu poate fi prezentată decât publicului specializat. Pe de altă parte, istoria geometriei e atât de *vizuală* încât poate fi povestită, făcând apel la descrieri, eventual la suport grafic. E atât de vizuală încât poate fi narată pe figuri. Lupta oamenilor de a înţelege forma a lăsat urme care sunt fragmente de epopee.

*

Vreme de două mii de ani, cea mai influentă referinţă în fundamentele geometriei au fost clasicele *Elemente* ale lui Euclid. Scrisă probabil la finele secolului al IV-lea î.Hr., lucrarea a circulat nu doar în Antichitate, dar şi în Evul Mediu, iar revoluţia ideilor din perioada lui János Bolyai şi a lui N. Lobacevski a avut loc înainte ca fundamentele geometriei să fie reclădite din temelii în timpul transformării moderniste a matematicilor de la finele secolului al XIX-lea. Cartea lui Euclid era cea care se studia atunci când era vorba de geometrie în universităţile europene, de cele mai multe ori discuţiile fiind inspirate de originalul grec al textului. Chiar şi astăzi există cursuri universitare care, fie la fundamentele matematicii, fie în cadrul cursurilor de istorie a matematicii, discută pe text cartea lui Euclid. În Statele Unite există o ediţie Dover care pune textul la îndemâna oricui.

Elementele conţin prima construcţie care poate fi considerată drept sistem axiomatic. Unii autori vorbesc despre *metoda axiomatică*, înţelegând prin aceasta construirea unei teorii pe baza unor principii fundamentale, numite axiome. Problema e că sistemul axiomatic al lui Euclid are unele fisuri de natură logică. Înainte de a le descrie şi înainte de a povesti despre revoluţia în domeniul axiomaticii pe care critica sistemului lui Euclid a generat-o, să descriem pe scurt structura sistemului axiomatic prezentat în *Elementele* lui Euclid. Nu sistemul lui Euclid e cel pe care-l studiem în şcoala

elementară sau în liceu.

Structura sistemului axiomatic al lui Euclid porneşte de la cinci postulate şi cinci axiome. În Cartea I a *Elementelor* apar şi 23 de definiţii. Cele cinci axiome ascund principii care astăzi ţin mai degrabă de câmpul algebrei:

„1. Lucruri care sunt egale cu acelaşi lucru sunt egale unul cu celălalt.

2. Dacă măsuri egale sunt adunate la măsuri egale, sumele obţinute vor fi egale.

3. Dacă măsuri egale sunt scăzute din măsuri egale, rezultatele obţinute vor fi egale.

4. Lucruri care coincid unul cu celălalt sunt egale unul cu celălalt.

5. Întregul e mai mare decât partea”.

Cele cinci postulate sunt presupunerile fundamentale ale geometriei. În primele trei postulate, presupunem că ştim să facem următoarele operaţiuni geometrice:

„1. Să desenăm o linie dreaptă din orice punct către orice punct.

2. Să extindem o linie dreaptă finită continuu în linie dreaptă.

3. Să descriem un cerc cu orice centru şi orice distanţă [ca rază]”.

Ultimele două postulate sunt:

„4. Unghiurile drepte sunt egale unul cu celălalt.

5. Dacă o dreaptă intersectează alte două drepte în aşa fel încât suma unghiurilor interioare situate de aceeaşi parte este strict mai mică decât suma a două unghiuri drepte, atunci cele două drepte, dacă sunt extinse, se întâlnesc de partea în care unghiurile sunt strict mai mici decât două unghiuri drepte”.

Acest din urmă postulat e cel pe care unii geometri, începând cu Proclus şi continuând cu Saccheri şi

Legendre, au încercat să-l demonstreze. Lungă e istoria nefericitelor încercări de a demonstra ceea ce nu se poate demonstra.

În fond, care au fost lacunele logice identificate în sistemul axiomatic al lui Euclid? Întâi de toate, un sistem axiomatic care să răspundă tuturor exigenţelor ar trebui ca, pe baza celor zece principii enunţate mai sus, să poată demonstra orice propoziţie şi-ar propune în geometria elementară. Demonstraţiile ar trebui să nu prezinte lacune şi să cuprindă între ipoteze numai principiile enunţate mai sus sau consecinţele lor. Iată însă ce se întâmplă în Cartea I, chiar în Propoziţia 1, al cărei enunţ e următorul: „Pe o linie dreaptă finită să se construiască un triunghi echilateral”.

Pentru demonstraţie (vezi figura), Euclid consideră segmentul *AB* şi, cu centrul *A* şi raza *AB*, se construieşte un cerc. Din nou, cu centrul *B* şi raza *BA* (conform axiomei 4, e aceeaşi lungime ca şi *AB*), se construieşte un cerc. Cele două cercuri se taie în *C.* Atunci triunghiul *ABC* este echilateral, pentru că raza *AB* este egală cu celelalte raze, *AC* în primul cerc şi *BC* în cel de-al doilea.

E o primă demonstraţie ingenioasă dintr-un lung şir de construcţii care pun în evidenţă o imaginaţie interesantă. Este extraordinar faptul că Euclid nu a admis drept evidentă construcţia triunghiului echilateral, ci a înţeles că acest lucru trebuie demonstrat pe baza principiilor enunţate. De fapt, în această idee e tot spiritul metodei axiomatice, şi vedem că Euclid avea o idee foarte clară despre ceea ce face. Dar demonstraţia conţine o lacună: admite fără demonstraţie faptul că cele două cercuri se intersectează. Fireşte, intuiţia ne îndeamnă să privim cele două cercuri ca pe nişte obiecte fizice. Privim figura şi spunem: trebuie să se intersecteze! Da, dar aici ne aflăm pe teritoriul fundamentelor geometriei, iar cele două cercuri sunt nişte entităţi abstracte, ale căror

proprietăţi trebuie să decurgă din cele cinci axiome şi din cele cinci postulate. Or, existenţa acelei intersecţii nu e asigurată de raţionamentul prezentat de Euclid. Ar trebui demonstrat că intersecţia există. Pentru o demonstraţie completă ar fi nevoie de o bună înţelegere a conceptului de continuitate, care a fost bine asimilat şi bine înţeles abia către finele secolului al XIX-lea.

Un contraexemplu se poate construi imediat. Dacă ne propunem să lucrăm în planul raţional, cel dat de produsul cartezian al mulţimii numerelor raţionale cu ea însăşi, şi dacă vom considera cercurile de centre (0,0) şi (1, 0) şi de rază 1, atunci când calculăm coordonatele intersecţiilor obţinem că una dintre coordonate e un număr iraţional. Astfel, punctul de intersecţie al celor două cercuri nu se află în planul raţional.

Mai departe, Propoziţia 1, a cărei demonstraţie conţine lacuna descrisă mai sus, e folosită pentru a demonstra Propoziţia 2: „Să se construiască într-un punct dat (ca extremitate) o linie dreaptă egală cu o linie dreaptă dată”. O demonstraţie mult mai simplă e necesară pentru a demonstra Propoziţia 3, acolo unde Euclid îşi propune ca, „dacă se consideră două linii drepte care nu sunt egale, să se taie din cea mai lungă o linie dreaptă egală cu cea mai scurtă”. În fine, după aceste două rezultate a căror demonstraţie e corectă, Euclid enunţă Propoziţia 4, în a cărei demonstraţie apare din nou o lacună de factură logică.

Enunţul ei este următorul: „Dacă două triunghiuri au două laturi egale cu două laturi corespondente şi au unghiurile conţinute între laturile egale la rândul lor egale, ele vor avea şi bazele egale între ele. Astfel, triunghiurile vor fi egale între ele, iar unghiurile rămase vor fi egale între ele”.

Recunoaştem aici cazul de congruenţă latură-unghi-latură al triunghiurilor.

Ei bine, demonstraţia lui Euclid nu e perfectă. Iată cum decurge. Se consideră triunghiurile *ABC* şi *DEF* şi se presupune că *AB* e egal cu *DE*, iar *AC* e egal cu *DF*, în timp

ce unghiul *A* din primul triunghi e egal cu unghiul *D* din al doilea.

Apoi Euclid ia triunghiul *DEF* şi îl „aşază” deasupra triunghiului *ABC*, mai precis *D* deasupra lui *A.* Pentru că *AB* e egal cu *DE*, prin presupunerea pe care am făcut-o mai înainte, *E* se va „aşeza” deasupra lui *B.* Cum unghiul *A* din primul triunghi este egal cu unghiul *D* din al doilea, direcţia în care vine linia dreaptă *AC* trebuie să coincidă cu direcţia în care pleacă *DF.* Aşadar, *F* trebuie să se „aşeze” deasupra punctului *C.* Or, dacă *B* se suprapune lui *E*, iar *C* se suprapune lui *F*, atunci linia dreaptă finită *BC* trebuie să coincidă cu *EF*, deci ele trebuie să fie egale.

Problema acestei demonstraţii se vede de la început: nimic din postulate nu ne-a pregătit să „aşezăm” un triunghi deasupra celuilalt. Ceea ce pare o construcţie ingenioasă care merge în direcţia soluţiei este de fapt un argument cu o mare lacună. Dacă ne propunem o demonstraţie perfectă, atunci demonstraţia aceasta n-ar trebui să suscite întrebări fără răspuns.

Acestea sunt două dintre problemele cu care se confruntă sistemul axiomatic al lui Euclid.

Începând cu secolul al XIX-lea, mulţi autori au început să critice şi să pună sub semnul întrebării *Elementele* lui Euclid. Fireşte, astăzi acest prim sistem axiomatic ni se pare extraordinar pentru momentul când a fost conceput, dar, din pricina lacunelor amintite mai sus, nu mai răspunde exigenţelor din prezent. Faptul că azi putem spera să gândim corect aceste lucruri se datorează evoluţiei ideilor din fundamentele geometriei din a doua jumătate a secolului al XIX-lea şi schimbărilor produse în perioada istorică numită transformarea modernistă a matematicii.

Cineva trebuia să vină şi să descompună realitatea în atomi. Mai precis, trebuiau identificate exact acele principii geometrice fundamentale care, odată enunţate, ar fi asigurat că următoarele demonstraţii sunt impecabile. Era un proces laborios, bazat pe multă intuiţie şi pe metoda „încearcă-şi-verifică”. Acolo, în aria fundamentelor,

nu se putea nici calcula, nici cuantifica, iar construcţia prezenta o dificultate de o natură cu totul diferită decât în domeniul algebrei: aici era provocarea logicii.

*

Ce rost au matematicienii pe lumea aceasta? Fie şi numai să reamintească ce înseamnă un raţionament corect pe baza unor principii, şi tot şi-ar justifica utilitatea. Rostul matematicienilor este de a echilibra realitatea, după ce oamenii politici, administratorii, personajele cu îndreptăţire de a discuta chestiuni religioase şi agenţii de publicitate spun minciuni. Când povestim despre drepte, triunghiuri şi cercuri, în subtext nu despre asta e vorba, ci despre una dintre cele mai vechi năzuinţe umane: de a trăi într-o lume în care lucrurile să fie atât de clare precum într-un sistem axiomatic perfect. Nu ştim dacă s-ar putea ca în vreo societate lucrurile să meargă aşa, dacă ar fi posibil ca justiţia să funcţioneze fără greşeală şi să opereze pe baze logice, la toate nivelurile. Ştim că viaţa e nedreaptă4, ştim că pot să apară crize naturale, politice sau economice care ne scapă de sub control. De ce n-am arunca o privire către imaginea unei lumi perfecte, spre perspectiva unui univers pe care l-am putea controla cu raţionamente şi care, de-am fi într-un vis de copil, ar fi plin de onestitate şi justeţe. Am vedea o lume ideală, organizată de-a lungul unor teme fundamentale, născute din necesităţile formelor universului. Am vedea poliedre ale căror faţete ar fi poligoane regulate, toate inscriptibile în sfere ce ne-ar fi accesibile prin calcul şi raţionament. Munţii s-ar ridica spre cer precum turnuri de diamante, dodecaedre susţinând cuburi, şi ar reflecta stele fixe, etern aşezate pe un firmament configurat de-a lungul unei latice cu coordonate numere întregi.

E greu de descris câtă suferinţă produc unei minţi obişnuite cu rigoarea oamenii politici care vorbesc despre probe, despre dovezi, despre argumente – dar ceea ce prezintă ei nu se susţine, iar argumentele la care recurg ei nu vizează fondul problemei. Lumea reală nu se apropie de rigoarea lumilor unde s-a născut şi se aplică metoda

axiomatică. Sunt momente în viaţa oricărui cetăţean onest al lumii reale când accesarea ştirilor este echivalentă cu o insultă la adresa logicii. Atunci când minciunile sunt evidente, când discrepanţele dintre teritoriul unde te-ai antrenat şi adevărurile lumii reale devin stridente, durerea pe care o resimţi nu e diferită de durerea fizică. Te poţi imuniza treptat: odată cu trecerea anilor înveţi să accepţi această discrepanţă, iar tot ce rămâne în urmă e regretul că tensiunile realităţii nu se tranşează pe teritoriul geometriei. Nu e un asemenea vis o dulce naivitate demnă de capturat într-un poem?

*

L-am amintit mai înainte pe David Hilbert, ultimul matematician care a avut o viziune cuprinzătoare asupra întregului câmp al matematicilor, posesorul unei culturi matematice ce îmbrăţişa toate domeniile. Despre Hilbert, Dan Barbilian, care a urmat cu el cursul de fundamentele matematicilor în toamna anului universitar 1921, scrie astfel: „E sigur că Hilbert a fost un mare matematician. Dar felul său de a fi mare e puţin special. […] Hilbert e arhitectul unei ordine hipogeene: un geniu al fundamentelor. Direcţia lui de cercetare e involutivă. Chiar în faza lui creatoare, Hilbert nu descoperă *domenii*, ci inventează *sisteme*: metode şi maşini de demonstraţie. În privinţa aceasta, credem că Hilbert înfăţişează un tip matematic de decadenţă, de subtil sfârşit de cultură. Fondul lucrurilor îi este aproape indiferent, mai ales din momentul când se liberează de influenţa prieteniilor sale matematice şi se lasă în voia propriei genialităţi. Ceea ce Hilbert caută în matematice e dificultatea şi învingerea ei, pentru a crea într-însul acea beţie specială, castă şi înlănţuitoare ca un opium: *starea de geometrie*”.

*

Şi acum portretul. David Hilbert s-a născut în 1862 la Königsberg, şi tot acolo a studiat la *gymnasium.* Studiile universitare le-a făcut la Universitatea din Königsberg, ca şi doctoratul, susţinut în 1885 cu profesorul Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939).

David Hilbert a lucrat pentru Universitatea din Königsberg din 1886 şi până în 1895, când a plecat la Göttingen. Prima versiune a sistemului axiomatic al lui Hilbert a fost concepută în 1891, pentru semestrul de vară de la Universitatea din Königsberg, şi a rămas multă vreme în manuscris, sub titlul *Projektive Geometrie.* Punctul de plecare al construcţiei lui Hilbert au fost primele secţiuni ale manualului *Geometrie der Lage*, scris de Theodor Reye. Cu toate acestea, Hilbert a venit cu o interpretare personală, schimbând şi simplificând multe dintre demonstraţii şi reordonând teoria într-o structură care i s-a părut mult mai potrivită. Ulterior, punctul de vedere personal avea să depăşească orice altă referinţă precedentă, iar sistemul axiomatic nu va mai arăta deloc precum cel al lui Euclid. Mai precis, Hilbert avea să revină asupra manuscrisului în 1893, când a pregătit, tot pentru Universitatea din Königsberg, un curs intitulat *Grundlagen der Geometrie*, dar care nu s-a ţinut din pricina numărului prea scăzut de studenţi înscrişi. Totuşi, acelaşi curs avea să aibă loc la Königsberg în vara lui 1894, sub titlul *Über die Axiome der Geometrie.* Acesta avea să fie al şaselea curs de geometrie ţinut de Hilbert în anul academic 1894, dar este primul curs pe care l-a susţinut pe o temă propriu-zisă de *fundamentele geometriei.* Aveau să urmeze versiunile de la Göttingen, din 1896 şi 1898, ale notelor de curs pentru aşa-numitele cursuri de vacanţă, iar în 1898-1899 o versiune mult mai aproape de forma finală, intitulată *Grundlagen der euklidischen Geometrie.* Finalmente, procesul de căutare şi fixare a sistemului axiomatic a fost încheiat cu cele două versiuni intitulate la fel, *Grundlagen der Geometrie*, scrise în 1899 şi, respectiv, 1902. Importanţa acestui punct de vedere asupra domeniului a fost crucială: şi astăzi există cursuri universitare, ca de exemplu cel al lui Greenberg, care sunt bazate pe un sistem axiomatic inspirat din construcţia lui Hilbert.

Structura sistemului axiomatic al lui Hilbert este următoarea. Axiomele sunt împărţite în cinci clase. Primul

set sunt axiomele de incidenţă, care statuează relaţiile între puncte, drepte şi plane. Apoi urmează axiomele de ordine, care se referă, între altele, la ordinea punctelor pe o dreaptă. Setul al treilea sunt axiomele de congruenţă, între care şi cazul de congruenţă al triunghiurilor latură-unghi-latură, acolo unde am văzut că existase o lacună în sistemul axiomatic al lui Euclid. Cel de-al patrulea set e compus dintr-o singură axiomă, cea a paralelelor. În fine, al cincilea set de axiome se compune din două axiome ale continuităţii: una e aşa-numitul principiu al lui Arhimede, cealaltă e axioma completitudinii modelului.

Când Dan Barbilian a ajuns la Göttingen în 1921, David Hilbert încă mai preda despre asta, într-o formă de acum fixată a unui sistem axiomatic pe care geometrii din întreaga lume îl studiaseră, criticaseră, analizaseră şi, în cele din urmă, îl acceptaseră ca răspunzând ireproşabil provocării vechi de două mii de ani.

Ideea centrală a metodei axiomatice este că orice teorie matematică e construită dintr-un set de obiecte primare, care nu necesită definiţii, împreună cu un set de axiome. Teoria se construieşte apoi ca o colecţie de enunţuri matematice riguroase deduse din axiome sau folosind axiomele sau unele dintre consecinţele lor. Pentru geometrie, setul de obiecte primare poate fi diferit de la un sistem axiomatic la altul; felul cum construim atomii de informaţie e diferit, dar metoda rămâne. De exemplu, pentru sistemul axiomatic al lui Hilbert, noţiunile primare includ punctele, dreptele, planele. Se pot construi şi alte sisteme axiomatice, cu alte puncte de plecare. Nu afirmăm că această construcţie este unică, ci că marele merit al lui Hilbert este de a fi construit primul sistem axiomatic ireproşabil al geometriei plane.

Într-un portret literar dedicat lui Hilbert, Dan Barbilian scrie că originalitatea axiomatizării geometriei elementare, aşa cum i-o datorăm lui David Hilbert, constă în următoarele patru aspecte:

„1 o. În enumerarea, pentru prima dată exhaustivă, a

ipotezelor independente care stau la baza geometriei elementare.

2 o. În conceperea lor ca simple relaţii logice – un punct de vedere opus empirismului lui Pasch –, a căror îndreptăţire stă în demonstraţia a priori a lipsei lor de contrazicere (sau a consistenţei lor).

3 o. În punerea problemei independenţei axiomelor şi definirea acesteia ca o problemă particulară de consistenţă.

4 o. În distincţia pe care Hilbert nu o face explicit, dar pe care Fundamentele o implică, între problema metamatematică a categoricităţii, care revine la a stabili că orice enunţ, angajând numai axiomele sistemului, e demonstrabil (adică adevărat sau fals), şi problema matematică a categoricităţii: toate dezvoltările logice posibile ale sistemului sunt – sau pot deveni, cu preţul unor procese finite de extinderi – izomorfe între ele".

*

Dacă la primul curs pe care l-a susţinut la Königsberg, în 1891, audienţa nu era compusă decât din doi studenţi înscrişi oficial, un deceniu mai târziu problema fundamentelor geometriei interesa mulţi matematicieni; mulţi au scris şi comentat lucrarea lui Hilbert. Miza era importantă: era vorba despre construirea unui sistem axiomatic compus din axiome independente, necontradictorii, adică perfect consistent logic. Între cei care au acceptat faptul că sistemul axiomatic propus de Hilbert constă în axiome independente (adică niciuna dintre axiome nu decurge în mod logic din celelalte) s-au aflat Hölder şi Sommer, în timp ce Schur a afirmat că trei dintre axiomele versiunii din 1899 decurg din celelalte opt. Mai târziu, E.H. Moore a demonstrat că punctul de vedere al lui Schur era incorect. În 1904, Oswald Veblen a scris un text nu lipsit de nuanţe polemice, o lucrare izvorâtă din teza sa de doctorat, o construcţie alternativă a unui alt sistem axiomatic, diferit de cel al lui Hilbert. Mai precis, el a scris că îşi priveşte direcţia de cercetare drept o continuare a muncii lui Pasch şi Peano, mai degrabă decât

a lui Hilbert şi Pieri5. Ceva mai târziu, în 1912, R.L. Moore a demonstrat că unele dintre axiomele enunţate de Veblen în încercarea lui de a da o abordare alternativă fundamentelor geometriei decurg din celelalte.

Din toată această labirintică istorie, o concluzie se desprinde. E dificil să stabileşti fundamentele unui domeniu. Fie că e vorba de drept constituţional, de modele în ştiinţele sociale, de considerente axiomatice despre structura universului, despre ipoteze fizice, e o chestiune de mare fineţe să stabileşti principiile pe baza cărora funcţionează domeniul respectiv. Orice construcţie care ţine de fundamente e expusă pericolului de a produce fisuri de natură logică. Dificultatea include şi identificarea particulelor logice care intră în componenţa sistemului. Dacă nu identifici corect dificultăţile, rişti să încorporezi în demonstraţii argumente incorecte, aşa cum a făcut Euclid. Şi lacunele pot sta la vedere foarte mult timp, fără ca nimeni să le observe, atât de subtile pot fi.

Pe de altă parte, pentru cercetătorul care studiază un ansamblu de principii şi relaţiile dintre ele, cel puţin acolo unde este vorba de geometrie şi unde lucrurile pot fi „văzute”, geometria devine interesantă abia în părţile teoriei unde sunt principii puţine, unde balanţa universurilor posibile se poate înclina în orice parte. Lumea respectivă ar putea fi altfel. Ca o ipotetică planetă unde lucrurile sunt învăluite în ceaţă şi sunt instabile, unde numai un pas desparte haosul de zona ordonată şi până atunci cunoscută. Aşa încep cercetările şi probabil asta îl atrăgea pe Hilbert. Ca geometru, abia în acele arii care necesită limpezire, clarificare, începi să devii realmente interesat. Un grăunte de curiozitate şi îndoială te aruncă mai departe: ce ar fi dacă? Intuiţia anticipează, te atrage, te provoacă. Nu e o muncă similară unei activităţi ordonate, bună de încadrat într-un program, ci o activitate continuă, o obsesie insistentă, care ajunge să îţi domine zilele şi nopţile. De la acel punct de plecare al intuiţiei, până şi cercetarea cea mai riguroasă îngăduie forme de imaginaţie similare celor pe care le mai cunoaşte

şi poezia. Alteori, eforturile tale sunt dublate de orgoliu: dar dacă pe aici n-a mai trecut nimeni? Ce-ar fi dacă lucrurile acestea nu au mai fost considerate nici de Gauss, nici de Riemann, de niciuna dintre umbrele tutelare? Îţi imaginezi că aşa se simte aerul rarefiat al înălţimilor. Orgoliul acesta e nemăsurat şi, păcat sau nu, el devine parte a motivaţiei. Eterna suferinţă a geometrului care studiază fundamentele geometriei e aceea când trebuie să precizeze contextul în care aserţiunile intuite se menţin adevărate; abia aceea este proba adevărului, într-un cadru logic bine precizat. În detaliile tehnice, demersul e total diferit de cel poetic, cu care are comun cel mult punctul de pornire, intuiţia care asociază lucruri aparent diferite, care arde etapele, care motivează printr-o viziune ce anticipează.

*

Au trecut câteva decenii înainte ca George D. Birkhoff să observe, în 1932, că încorporarea ideii de distanţă în fundamentele geometriei simplifică foarte mult prezentarea subiectului. Iată ce scrie el: „Acum câţiva ani, încercând să prezint cele mai simple fapte geometrice într-o formă populară, am realizat cum geometria plană ar putea fi abordată mai uşor cu ajutorul conceptelor încorporate în riglă şi raportor. Scopul articolului de faţă e să prezinte setul corespunzător de axiome într-o formă matematică riguroasă. Din punct de vedere strict matematic, aceste postulate cu greu ar putea fi situate alături de alte sisteme axiomatice între care, numai în ţara aceasta6, le-am putea aminti pe cele ale lui Veblen, Veblen şi Young, Schweitzer şi Huntington”.

Sistemul lui Birkhoff nu are decât patru axiome, mult mai puţine decât sistemul axiomatic al lui Hilbert: cel al măsurii de-a lungul riglei, cel al incidenţei (care descrie relaţia între dreaptă şi punct), cel al măsurii unghiului şi, oarecum surprinzător, cel al triunghiurilor asemenea (congruenţa triunghiurilor apare drept un caz particular de asemănare). De la sistemul axiomatic al lui Hilbert la cel al lui Birkhoff simplificarea e monumentală şi, prin

această construcţie, se deschidea posibilitatea ca fundamentele geometriei să poată fi prezentate publicului larg, inclusiv elevilor care studiază în liceu. De aceea, probabil, lucrarea lui Birkhoff a avut atât de mult succes după ce a fost publicată în una dintre cele mai prestigioase reviste ale momentului.

Motivul acestei simplificări e includerea în fundamentele geometriei a ideilor de distanţă şi de măsură a unghiurilor. Sistemul axiomatic al lui Hilbert nu le-a inclus, pentru că ţintea spre o geometrie „pură”, unde algebra să nu fie amestecată. Dar Birkhoff era interesat tocmai de accesibilitatea ideilor şi, în 1932, a fost dispus să renunţe la „puritatea” teoriei cu scopul de a o face mai uşor de înţeles.

Cititorul care va parcurge sistemul axiomatic al lui Birkhoff va descoperi o dificultate majoră, într-o zonă apropiată de începutul teoriei. Pe baza celor patru postulate, e destul de dificil să tratezi chestiunile legate de separare în plan. Mai precis, când anumite puncte sunt situate de o parte şi de alta a unei drepte. Pentru a decide în probleme legate de separare, Birkhoff foloseşte măsura unghiurilor. Problemele de situare în plan sunt transpuse în termeni de măsură. E mai uşor să măsori şi să compari decât să dezvolţi raţionamente complicate, eventual implicând mai multe cazuri. În sistemul axiomatic al lui Birkhoff sunt permise triunghiuri degenerate şi măsuri ale unghiurilor de 180 de grade; or, tocmai asta produce dificultăţi în unele demonstraţii. Cu o mică ajustare a teoriei aici, teoria s-ar fi putut simplifica şi mai mult.

*

Există două puncte de vedere esenţial diferite privind predarea geometriei pe baza metodei axiomatice. Primul dintre ele urmează ideea lui Hilbert: geometria trebuie să aibă un sistem axiomatic cât mai independent, care să nu încorporeze numerele reale. Cel de-al doilea punct de vedere s-a dezvoltat plecând de la punctul de vedere al lui Birkhoff: încorporând numerele reale în axiome, obţinem o abordare mai simplă, ceva ce poate deveni foarte accesibil.

Din aceste raţiuni, la începutul anilor şaizeci a început să se dezvolte o preocupare constantă pentru integrarea punctului de vedere axiomatic în programa şcolară din liceele din Statele Unite. Este momentul când Saunders MacLane (1909-2005), unul dintre fondatorii teoriei categoriilor, a avut o contribuţie esenţială. MacLane intenţiona să urmeze doctoratul la Universitatea din Chicago, dar, la începutul anilor treizeci, a descoperit că, cel puţin pe componenta de matematică, respectiva universitate se afla în declin, din pricina faptului că la ieşirea la pensie profesorii obişnuiau să-i angajeze în locul lor pe foştii lor studenţi. Aşa că MacLane a plecat să-şi facă doctoratul la Göttingen, unde avea să-şi susţină teza în 1934. Acolo a studiat cu Paul Bernays (1888-1977), Emmy Noether (1882-1935) şi Hermann Weyl (1885-1955). Se spune că într-o seară, la operă, când a ieşit în foaier în pauza dintre acte, MacLane s-a trezit lângă Hitler şi Goebbels. Peste ani, avea să-i povestească lui Steven Krantz, în chip de anecdotă, că şi-ar fi dorit să fi avut la el un pistol.

MacLane a fost vicepreşedinte al Academiei Naţionale de Ştiinţe, al Societăţii Filosofice Americane, precum şi preşedinte al American Mathematical Society. Pentru o vreme, în anii cincizeci, a fost preşedinte al Mathematical Association of America, al cărei principal obiectiv este îmbunătăţirea calităţii învăţământului. În perioada aceea a observat că anumite detalii ale sistemului axiomatic al lui Birkhoff ar putea fi făcute şi mai accesibile. Educat la Göttingen în spiritul recunoaşterii importanţei fundamentelor matematicii, era la curent cu toată istoria domeniului şi avea toată competenţa şi viziunea să ducă la îndeplinire proiectul unui nou sistem axiomatic. Între alte importante modificări încorporate în construcţia lui, Saunders MacLane a propus o versiune foarte utilă a aşa-numitei axiome de continuitate.

Peste câţiva ani, School Mathematics Study Group (pe scurt, SMSG) a produs un sistem axiomatic bazat pe ideile explorate de Birkhoff şi MacLane, iar pe baza acelor

axiome a scris un manual care nu s-a difuzat decât în format şapirografiat. Dar, cu modificări minore faţă de acel sistem axiomatic, Edwin E. Moise a scris două volume care sunt folosite şi azi în sistemul de educaţie nord-american. Aceste cărţi au inspirat apariţia în diverse ţări a unor manuale în care metoda axiomatică e prezentată pentru liceeni. Un astfel de manual a funcţionat cu succes şi în România, în anii şaptezeci şi optzeci, şi a fost foarte bun, dacă n-a fost cumva chiar manualul ideal de geometrie. Pe acea componentă, sistemul de educaţie românesc a înregistrat o reuşită, la care modificările ulterioare ale programei analitice au renunţat. Actualmente s-a renunţat la metoda axiomatică în favoarea unei abordări algebrizate, care nu acoperă aspectele logice ale studiului geometriei. E ca şi cum cineva şi-ar propune să predea zoologia fără să se refere vreodată la clasificarea animalelor, ci doar înşirându-le într-o ordine oarecare.

Ce ar fi de făcut? Ar fi excelent dacă s-ar reveni fie la acel manual românesc, fie la o traducere a manualului lui Edwin E. Moise. Ar mai fi un manual foarte bun care ar merita tradus în România, cel publicat în cadrul University of Chicago School Mathematics Project.

Aceste construcţii au fost rezultatul unei laborioase evoluţii care, după cum se vede, însumează eforturile unor minţi luminate, ce au reflectat atent asupra problemei vreme de multe decenii. Idei importante, şlefuite cu migală în timp, pot fi ocultate în numele unui pragmatism prost înţeles, dar preţul poate fi ridicat: sunt generaţii întregi de elevi care nu beneficiază de antrenamentul rigorii la care generaţiile precedente avuseseră acces.

*

În fond, ce ne interesează cel mai mult aici? Miza e felul cum ar putea contribui geometria la educarea gândirii tinerilor. Fără intenţia de a divaga, să recurgem aici la o mărturie din domeniul şahului. Ne amintim de o pagină remarcabilă în care Alexksandr Kotov descrie felul cum gândesc unii jucători de şah. Să zicem că într-o poziţie anume pe tabla de şah ne tentează două opţiuni: Mutarea

A şi Mutarea B. Pentru că suntem într-o competiţie oficială, timpul nostru e limitat. Ne gândim la Mutarea A. Încercăm să anticipăm cum gândeşte adversarul. Ceva ne deranjează la Mutarea A, pentru că ar permite un răspuns al oponentului care i-ar putea da un oarecare avantaj. Atunci începem să analizăm Mutarea B. Da, dar şi în acest caz oponentul ar avea ceva inteligent de făcut, ceva care l-ar aduce iarăşi în avantaj. Hai să ne întoarcem din nou la Mutarea A şi să mai analizăm o dată. Ochii ne sunt pe ceas. Minutele trec, în timp ce ezităm între opţiunile A şi B. Avem un timp limitat la dispoziţie. Nu, nu vom juca Mutarea A. Atunci hai să revenim la analiza Mutării B. Alternând de câteva ori opţiunea A cu B, de fiecare dată nesatisfăcuţi şi de una, şi de cealaltă, sub presiunea timpului, până la urmă alegem: vom face Mutarea C. E adevărat, nu am apucat s-o analizăm, dar fie ce-o fi, pentru că A şi B oricum nu sunt bune.

Mutarea C poate fi o gafă.

În multe situaţii, se poate întâmpla ca oamenii să facă raţionamente catastrofale. Oamenii pot vedea dovezi acolo unde ele nu există. Să ne amintim filmul *12 oameni furioşi*, cu Henry Fonda, regizat de Sidney Lumet, pe baza unui text de Reginald Rose. Povestea este, în felul ei, extraordinară. După ce argumentele finale au fost prezentate în cazul unei crime, în care un tânăr de 18 ani e acuzat că şi-ar fi ucis tatăl, judecătorul dă ultimele instrucţiuni procedurale juriului. Aşa cum e prevăzut în legea americană, fiecare dintre juraţi trebuie să opteze, pe baza probelor prezentate, dacă acuzatul este *vinovat* sau *nevinovat.* Juriul ajunge la o decizie doar dacă votul e dat în unanimitate. Juraţii ştiu că verdictul *vinovat* înseamnă automat condamnarea la moarte a acuzatului. Cei doisprezece se mută în sala juriului, unde dezbat argumentele pro şi contra vinovăţiei acuzatului. Atunci ajung să se cunoască mai bine. Unii dintre ei sunt influenţabili, alţii sunt creduli, unii irascibili, alţii încăpăţânaţi sau orgolioşi. Fiecare element e important atunci când cineva îşi formează o opinie. Despre asta e

vorba în film, despre cum iniţial unsprezece dintre juraţi sunt gata să voteze *vinovat*, şi numai unul dintre ei, personajul jucat de Henry Fonda, nu crede că există suficiente probe pentru a fi convins de vinovăţia tânărului.

Felul cum oamenii gândesc şi cum acceptă probele e esenţial, şi asta nu doar în cazurile care ajung în faţa legii. Şi ca să pregăteşti un fişier *Excel* cu o programare oarecare, şi ca să ţii contabilitatea unei firme, şi ca să programezi o rută comercială sau un traseu turistic e nevoie de un raţionament. Ce anume într-un sistem educaţional antrenează cel mai bine tinerii pentru diverse feluri de a gândi? Cum anume se poate practica cel mai bine arta de a raţiona?

Se pot menţiona tot felul de greşeli de raţionament pe care oamenii le-au făcut în decursul istoriei. La fel ca în *12 oameni furioşi*, e foarte posibil ca în unele situaţii 11 oameni din 12 să opteze eronat sau să admită drept valabile dovezi care, la o analiză atentă, sunt de fapt insuficiente. Sunt cunoscute în istorie situaţii când majoritatea a trimis, prin alegeri libere, un conducător politic nepotrivit către o poziţie importantă. Sunt cunoscute situaţii când opinia politică a majorităţii a susţinut, în momente istorice de cumpănă, un punct de vedere care apoi s-a dovedit a fi eronat. Sunt cunoscute momente când mass-media a izbutit să influenţeze, chiar dacă pentru scurtă vreme, opiniile. Cum de e posibil aşa ceva? Care sunt principiile pe baza cărora raţionăm? Ce elemente anume luăm în calcul atunci când reflectăm asupra unei anumite probleme şi o analizăm?

*

Am putea vorbi despre valoarea umanistă a experienţei matematice. Nu ne interesează numai să înţelegem spaţiul, deşi acest lucru e foarte important, ci să înţelegem totodată şi logica. Vrem să *vizualizăm* anumite lucruri care ţin de câmpul logicii. Vrem să *vizualizăm* consecinţele unor ipoteze contrare. Vrem să putem reprezenta. Nu ne interesează geometria doar pentru aplicaţiile ei imediate, deşi aplicaţii există; nu pentru că

vrem să obţinem un profit imediat din plane, sfere sau cercuri, ci pentru că vrem să ilustrăm pe astfel de forme geometrice cum s-ar putea raţiona în mod ideal. Ar fi superb dacă în chestiunile vieţii de zi cu zi, în medicină, în politică, în economie, lucrurile ar fi la fel de *clare.* Dar nu e aşa. Viaţa reală include subtilităţi pe care de multe ori nu le distingem. Atunci când trece prin experienţa geometriei la vârsta adolescenţei, tânărul ar putea învăţa să nu se pripească în direcţia concluziilor, să ia în considerare toate elementele unei situaţii, să nu admită contradicţii în ipotezele pe baza cărora gândeşte, să nu încorporeze într-o argumentaţie premise false. Şi asta nu e puţin lucru.

1. Între timp a apărut şi ediţia a patra, iar preferinţele mele se extind şi asupra ei.

2. Nu am predat acel curs la Michigan State, el era predat de profesorul John D. McCarthy. Dar n-am rezistat să nu răsfoiesc manualul încă din prima mea săptămână la East Lansing.

3. Fraza asta mi-a fost spusă chiar în această formă în 1993 de profesorul Stere Ianuş, atunci când mi-a sugerat să citesc o întreagă carte de Barrett O'Neill. M-am speriat atât de tare de sugestie, încât îmi amintesc integral discuţia.

4. A zis-o Bill Gates.

5. Veblen avea 23 de ani când şi-a susţinut teza de doctorat.

6. În Statele Unite.

Despre curbură (partea a doua)

Adevărul e că nu putem anticipa întotdeauna unde ar putea fi util un concept geometric. În fiecare nouă construcţie, încercăm să ne menţinem aproape de fundamente, în speranţa că lucrurile pe care le studiem sunt aplicabile în contexte tot mai generale. Ne-am dori ca ideile care ne interesează să fie *relevante* pentru ceea ce ne propunem să înţelegem. Cu cât e mai fundamentală o idee matematică, cu atât e posibil ca relevanţa ei să fie mai

mare.

În geometria diferenţială modernă, cea care studiază varietăţile de dimensiune oarecare, nu există doar o singură curbură. Există trei curburi clasice, fiecare cu un rol important. Întâi de toate, e *curbura secţională*, extensia naturală a curburii suprafeţelor, cea pe care am descris-o în capitolul „Despre curbură (partea întâi)”. Acest concept a fost introdus de Riemann, aşa cum am arătat, extinzând ideea de curbură a suprafeţelor introdusă de Gauss în 1827. Apoi este *curbura Ricci*, despre care nu ne propunem să discutăm prea multe aici, dar care are un rol principal în multe studii, unele dintre ele importante în fizică. În fine, nu în ultimul rând, este aşa-numita *curbură scalară.* Pentru povestea noastră, ea îşi revendică un rol de personaj principal.

Să explicăm pentru început ce înseamnă *curbură scalară.* Să ne imaginăm un obiect de dimensiune 3, situat într-un ambient de dimensiune 4. Ştiu că intuiţia noastră nu ne ajută, că nu avem destule dimensiuni pentru a vedea cu adevărat obiectul acesta, dar putem să ne întoarcem la imaginea coborâtă din basm de care ne-am servit mai devreme: covorul zburător din *1001 de nopţi*, plutind într-o încăpere oarecare. Covorul obişnuit are dimensiune 2, pentru că are lungime şi lăţime. Să ne imaginăm că e vorba despre un covor zburător care ar avea dimensiune 3, aşadar un solid care are nu doar lungime şi lăţime, ci şi înălţime. Şi să ne imaginăm că e curbat, supus unor deformări care îl răsucesc, îl torsionează. Vrem să asociem acestei forme geometrice în fiecare punct valoarea unei curburi, la fel cum am făcut în cazul suprafeţelor. Unui punct din acest spaţiu curbat vrem să-i asociem un număr care să reprezinte curbura scalară în acel punct.

Pentru aceasta, să observăm că în fiecare punct al covorului zburător tridimensional putem duce un spaţiu tangent care, la rândul lui, are dimensiune 3. E greu să ne imaginăm asta? Să privim colţul de sus al încăperii (dacă încăperea e rectangulară şi are un colţ drept, lângă tavan). Acest colţ are trei direcţii perpendiculare una pe cealaltă:

una verticală, una spre dreapta şi ultima către stânga. Această configuraţie se numeşte triedru ortogonal. (Ne amintim asta de la orele de geometrie în spaţiu.) Să ne imaginăm acum că acest triedru e mobil, că se poate mişca prin interiorul covorului zburător tridimensional. Acest triedru ne va ajuta să măsurăm curbura scalară în fiecare punct. E ca şi cum am intenţiona să-i facem covorului un fel de tomografie, pentru a culege informaţii numerice din fiecare punct al solidului. Triedrul ortogonal mobil are în fiecare punct trei plane perpendiculare. Atunci când am vorbit despre curbura secţională, am văzut că fiecare plan poartă cu sine propria lui curbură secţională şi că această curbură depinde de cât de deformat este spaţiul nostru în direcţia respectivului plan.

Vom defini curbura scalară astfel: ea este suma celor trei curburi secţionale de pe cele trei feţe ale triedrului ortogonal. E ca şi cum fiecare dintre cele trei feţe ale triedrului ar avea un preţ şi noi am calcula preţul total, dat de faţa 1 plus faţa 2 plus faţa 3. Nu e nimic complicat: doar o sumă a unor valori, a unor numere. Pentru a nu ne încurca între atâtea valori ale curburii, să notăm curbura scalară prin *scal.*

La prima vedere s-ar părea că această cantitate depinde de felul cum aşezăm respectivul reper în punctul unde calculăm această sumă. Chiar aşa, ce s-ar întâmpla dacă am roti triedrul într-o altă poziţie? Întrebarea e firească. Dacă am obţine pentru fiecare altă poziţie relativă a triedrului o altă valoare numerică, cantitatea aceasta nu ne-ar fi utilă, nu-i aşa? De fapt, nu am avea ce face cu o cantitate care ar depinde de poziţie. Şi aici vine momentul unei surprize cum numai geometria poate oferi: indiferent cum poziţionăm triedrul ortogonal într-un punct dat, atunci când însumăm cele trei curburi secţionale de pe cele trei feţe ale sale obţinem aceeaşi cantitate. De aceea curbura scalară e importantă: e un *invariant de curbură*; înţelegem prin aceasta faptul că nu depinde de felul cum poziţionăm triedrul, ci numai de punctul unde e calculată.

Fireşte, faptul că am descris procesul de construcţie

a curburii scalare într-un spaţiu care are doar dimensiune 3 e util numai pentru a ne da o imagine a construcţiei. De fapt, putem defini curbura scalară şi pentru un spaţiu general, de dimensiune *n.* Să ne imaginăm din nou un covor zburător, în rolul varietăţii de dimensiune arbitrară, dar de data aceasta ne imaginăm că acest obiect geometric are dimensiune arbitrară *n*, iar acest *n* este cel puţin 2. Să considerăm un punct oarecare în acest spaţiu. Plecând din acel punct, să ne imaginăm *n* direcţii, oricare două perpendiculare între ele. Imaginea e aceeaşi ca şi la triedrul ortogonal din colţul camerei noastre, doar că în loc de 3 muchii făcute de intersecţia pereţilor şi de tavan acum sunt *n.* Alegând perechile de plane în acest *n*-edru ortogonal, să considerăm *suma tuturor curburilor secţionale de pe aceste plane*[1]. Aceasta e curbura scalară în general, iar notaţia standard pentru ea este, aşa cum convenisem, *scal.*

Uneori, dacă e mai convenabil să se lucreze cu o formă deghizată a curburii scalare, se utilizează şi aşa-numita *curbură scalară normalizată*, care nu e altceva decât valoarea curburii scalare împărţită la numărul de plane din *n*-edru, adică 2 *scal/n (n-l).* Vom nota cu *R* curbura scalară normalizată.

Ne propuseserăm în primele pagini ale acestui eseu să înţelegem ideea de formă cu ajutorul curburii. O generalizare firească a proprietăţii sferelor de a avea curbură secţională constantă ar fi acele spaţii care au curbura secţională constantă în orice punct şi în orice direcţie. Astfel de obiecte se mai numesc şi *forme spaţiale.* Aşadar, o formă spaţială e un obiect geometric de dimensiune arbitrară pentru care, în fiecare punct şi în orice direcţie am considera un plan, *valoarea curburii secţionale considerate este aceeaşi*. Formele spaţiale sunt utile pentru că ne permit să comparăm diversele spaţii geometrice între ele. Oricând vom întâlni un obiect geometric nou, îl putem compara cu acea sferă cu care ni se va părea nouă că seamănă cel mai mult.

*

Suprafeţele au fost vreme de veacuri studiate ca fiind situate într-un spaţiu ambient cu trei dimensiuni. De aceea Meusnier a introdus forma a doua fundamentală, pentru a da o expresie cantitativă felului cum suprafaţa stă în raport cu ambientul. Cât de mult se poate generaliza discuţia despre raportul dintre un obiect geometric şi spaţiul ambient în care el este situat? Unul dintre cele mai importante rezultate ale geometriei diferenţiale moderne este teorema de scufundare a lui John Forbes Nash Jr., a cărei demonstraţie a fost publicată în 1956 şi care afirmă că *orice varietate riemanniană poate fi privită ca subspaţiu într-un ambient euclidian de dimensiune suficient de mare.*

Una dintre întrebările fireşti ar fi: putem oare să aşezăm orice obiect geometric de acest fel, adică orice varietate riemanniană, în orice spaţiu ambient? Putem întotdeauna să punem un măr în buzunar? Răspunsul intuitiv e cel bun: dacă buzunarul e prea mic, atunci nu. Pe de altă parte, atunci când băgăm mărul în buzunar şi nu există restricţii, în materialul hainei apare o tensiune. Cumva ar trebui să existe o legătură între felul cum e curbat obiectul nostru, adică mărul, şi tensiunea pe care obiectul respectiv o resimte în fiecare punct faţă de spaţiul ambient.

În 1993, în studiul invarianţilor de curbură a avut loc o interesantă schimbare de viziune, şi despre aceasta vom povesti în cele ce urmează. Motivaţia acestui studiu au constituit-o explorarea consecinţelor teoremei de scufundare a lui John Forbes Nash Jr. şi necesitatea de a înţelege legătura dintre această teoremă şi ideea de curbură. Relaţia surprinzătoare a fost enunţată şi demonstrată de Bang-Yen Chen într-o lucrare publicată în 1996. Am notat cu R curbura scalară normalizată. Să notăm cu H vectorul curbură medie, care este o extensie a ideii de curbură medie introdusă de Sophie Germain şi poate fi privit ca o expresie a tensiunii dintre subspaţiu şi spaţiul ambient. Vom nota prin $H2$ *lungimea vectorului curbură medie la pătrat.* Să presupunem acum că spaţiul ambient este înzestrat cu o curbură secţională constantă *c.*

Cu aceste notaţii, B.-Y. Chen a demonstrat că subspaţiul trebuie să satisfacă în fiecare punct condiţia ca valoarea lui *R* să fie întotdeauna mai mică sau cel mult egală cu *H2 + c.*

Ce înseamnă acest lucru? Răspunsul e următorul: tensiunea în raport cu spaţiul ambient depinde de curbură. Să ne imaginăm că avem o sferă de dimensiune 2 şi rază 1/5. Atunci curbura ei gaussiană va fi 25. Dacă o aşezăm într-un spaţiu euclidian de dimensiune cel puţin 3, care va fi tensiunea pe care sfera o face cu spaţiul ambient? Conform inegalităţii enunţate mai sus, vedem că *H2* nu poate fi mai puţin de 25. Altfel spus, nu se poate să plasăm această sferă în spaţiul ambient fără tensiune.

La unul dintre seminarele de la Michigan State University, Bang-Yen Chen a spus odată aşa: Mai în glumă, mai în serios, nu e oare la fel şi cu oamenii? Unii dintre ei vor produce tensiune în orice echipă ar lucra, oriunde i-am pune să lucreze. Alţii tind să treacă neobservaţi. Unii dintre ei parcă au curbură scalară foarte mare, ceea ce produce inevitabil tensiune între ei şi mediul ambient. Dacă pentru oameni manifestarea tensiunii e o chestiune de timp, pentru spaţiile riemanniene se vede numaidecât: asta spune inegalitatea arătată mai sus.

Inegalitatea pe care tocmai am amintit-o are interpretări importante. Suprafeţele minimale sunt caracterizate de faptul că *H* este egal cu zero în fiecare punct al suprafeţei. Să presupunem că spaţiul ambient este cel euclidian, deci curbura secţională în spaţiul ambient este *c = 0.* Atunci, dacă valoarea curburii unui subspaţiu dat este strict pozitivă, valoarea lui *H2* nu poate fi zero. Asta e important, pentru că această informaţie produce imediat o *obstrucţie la minimalitate.* Altfel spus, există o informaţie importantă dată de curbură care spune ceva despre aspectele variaţionale: inegalitatea aceasta ne spune când subspaţiul considerat nu se comportă ca o membrană elastică aflată într-o poziţie în repaus.

Şi mai e ceva. O idee care pune în legătură aceste lucruri cu *Theorema Egregium* a lui Gauss. Interpretarea

relaţiei R mai mic sau cel mult egal cu $H2 + c$ este următoarea. Cantitatea geometrică R reprezintă geometria subspaţiului riemannian cu care lucrăm. Este aşadar o cantitate *intrinsecă*, în sensul că ea caracterizează geometria respectivului subspaţiu. Ne amintim această terminologie din discuţia despre *Theorema Egregium* a lui Gauss. Cantitatea $H2 + c$ este expresia geometriei spaţiului ambient. Practic, această relaţie cu aparenţă simplă, $R \leq H2 + c$, determină, din punctul de vedere al curburii, problema scufundării. Mai mult decât atât, inegalitatea astfel obţinută funcţionează şi ca o obstrucţie, în următorul sens. De exemplu, dacă avem un obiect de curbură scalară normalizată zece, nu îl vom putea niciodată scufunda într-o formă spaţială de curbură secţională constantă mai mică strict decât zece, pentru că inegalitatea obţinută nu ne permite acest lucru.

*

Atunci când am ajuns la Michigan State, în toamna lui 1996, aveam de gând să studiez în teza mea de doctorat alte probleme. Mi-am schimbat planurile după unul dintre seminarele de joi dimineaţa. Am realizat că rareori avem şansa să vedem în direct o schimbare de paradigmă, o evoluţie a viziunii asupra unor concepte fundamentale. Am renunţat la orice alt plan şi am început să studiez noii invarianţi de curbură. A fost o opţiune personală, o alegere care probabil încorpora toate experienţele mele de până atunci. Alegeri similare au fost făcute de doctoranzi din Belgia, Spania, Japonia sau România, care au considerat aceste noi concepte demne de un studiu în profunzime.

Voi povesti aici o singură idee, dintre cele pe care le-am văzut dezvoltându-se atunci, a cărei evoluţie am văzut-o povestită de cel care a pus în evidenţă conceptul. În 1993, B.-Y. Chen a descoperit o proprietate remarcabilă care are legătură cu problema imersiei. Să presupunem că studiem o varietate riemanniană de dimensiune oarecare n, adică exact acel obiect introdus în 1854 de Riemann şi a cărui menire era să generalizeze geometria suprafeţelor. Să considerăm toate planele de dimensiune 2 care sunt

tangente acestui spaţiu într-un punct *P* al său. Să presupunem că putem determina în ce direcţie se realizează cea mai mică valoare a curburii secţionale, adică infimumul curburii secţionale prin *P*; vom nota acest termen prin *inf (sec).*

Este natural să considerăm cantitatea *scal – inf (sec)*; construcţia e similară întru câtva ideii din studiul originar al Sophiei Germain, unde problema care interesa era felul cum se distribuie forţele în jurul unui punct material pe o suprafaţă. Vrem să înţelegem în ce parte se realizează cea mai mică pondere a curburii.

Cu notaţiile astfel stabilite, să ne punem din nou problema unei scufundări a unui subspaţiu riemannian într-un spaţiu ambient de curbură secţională constantă c. Din nou ne punem problema dacă mărul (subspaţiul) încape în buzunar (ambientul). Chen a demonstrat că valoarea *scal – inf (sec)* este în fiecare punct mai mică sau egală cu valoarea *bH2 + dc*, unde *b* şi *d* sunt nişte constante care depind numai de dimensiunea subspaţiului riemannian pe care îl studiem, nu şi de punctul considerat.

Cantitatea *scal – inf (sec)* nu ar fi fost deloc un candidat pentru vreo descoperire extraordinară. La prima vedere ni se pare o construcţie neaşteptată. Cu toate acestea, *scal – inf (sec)* joacă rolul cantităţii care exprimă geometria subspaţiului (e o cantitate intrinsecă), în timp ce *bH2 +* de este expresia geometriei extrinseci a ambientului. Ideea aceasta se află în cea mai naturală continuitate cu *Theorema Egregium* a lui Gauss. Astăzi, în literatura de specialitate cantitatea geometrică *scal – inf (sec)* se numeşte invariantul de curbură al lui Chen şi se notează prin simbolul *δ (2)*.

Aminteam că inegalităţile lui Chen dau un criteriu de obstrucţie la minimalitate. (Reamintim că un spaţiu riemannian minimal verifică *H=0* în fiecare punct.) Să vedem ce înseamnă asta. Ca urmare a inegalităţii enunţate mai sus, dacă *δ (2)* este mai mare strict decât zero, se întâmplă acelaşi lucru: obiectul geometric despre care e vorba nu poate fi plasat minimal într-un spaţiu cu *c*

= 0. De aceea aceste inegalităţi sunt importante: ele poartă codificată întreaga textură a spaţiului.

Aşa-numiţii invarianţi de curbură ai lui Chen se pot generaliza. Prima oară când am văzut această generalizare eram încă doctorand la Michigan State University; era în primăvara lui 1999 şi, audiind un seminar, am fost cuprins de un entuziasm care s-a convertit într-o intensă curiozitate. N-am să uit niciodată sentimentul acela. Era ca şi cum un mare secret al naturii s-ar fi decriptat în faţa mea: nu mă mai interesa decât studiul ideii de curbură, într-un context contemporan.

Semnificaţia culturală a acestei idei ar putea fi descrisă şi astfel: de fapt, ce înseamnă curbură? Pentru suprafeţe, conceptul a fost clarificat de Gauss. În dimensiuni mai mari, am văzut că lucrurile se complică, dar definiţia fundamentală a curburii secţionale ne-a rămas de la Riemann. Faptul că putem controla scufundarea unui spaţiu într-un alt spaţiu, pe care l-am numit ambient, uitându-ne la invarianţii de curbură, înţelegem că de fapt aceşti invarianţi poartă cu ei un adevărat ADN al formei2. *Curbura este astfel măsura prin care o formă geometrică se abate de la forma unei sfere; cât îi lipseşte unui spaţiu, în fiecare punct, ca să fie o sferă perfectă.* Şi sunt mai mulţi invarianţi de curbură care se pot construi după ideea prin care a fost obţinut *δ (2)*. Paradoxal e că între aceşti invarianţi nu există relaţii care să îi lege pe unii de ceilalţi. Altfel spus, toate acele cantităţi sunt independente, după cum şi elementele constitutive care intră în structura ADN-ului unei fiinţe vii au caracter independent.

Aşadar, problema curburii poate fi de mare complexitate şi studiul ei continuă şi în zilele noastre. Atunci când spunem *curbură*, suntem pregătiţi să avem în vedere toată această multitudine de informaţii care descriu spaţiul şi ne aşteptăm să existe probleme (aşa cum e problema scufundării) pentru abordarea cărora să fie nevoie să regândim problema de la fundamentele ei. Avem mult mai multe instrumente decât pe vremea când o minte

strălucită, ca Leonhard Euler, considera chestiunea curburii *mai degrabă echivocă.* Dar natura problemei pe care o studiem ne poate constrânge să regândim fundamentele fiecărui concept cu care lucrăm.

La un deceniu după ce mi-am încheiat teza, am continuat să reflectez asupra acestor concepte. Atunci când am avut ocazia să lucrez cu tineri talentaţi şi interesaţi, i-am învăţat câte ceva din ceea ce am studiat eu. Experienţa cea mai interesantă alături de studenţii mei a fost descoperirea, în vara anului 2012, a unui invariant de curbură pe care l-am numit *curbură amalgamatică* şi ale cărui proprietăţi le-am studiat3. Construcţia lui nu seamănă cu cea a invarianţilor Chen, dar paradigma studiului nuanţat al altor cantităţi de curbură decât cele clasice e evident îndatorată deschiderii de după descoperirile din perioada 1993-1996.

1. Sunt Cn2, adică numărul combinărilor de *n* luate câte două plane. Acest număr este *n (n-l)/2.*

2. Această metaforă apare prima oară la Chen, într-un studiu pe care l-a scris în 1997. Descrierea mi se pare foarte sugestivă: cantitatea care exprimă curbura este ADN-ul formei, la fel cum ADN-ul obişnuit codifică toată informaţia biologică a unei celule.

3. Am scris lucrarea „New Curvature Inequalities for Hypersurfaces in the euclidean Ambient Space” alături de patru dintre studenţii mei, C.T.R. Conley, R. Etnyre, B. Gardener, L.H. Odom. Va apărea în 2013, în *Taiwanese Journal of Mathematics*.

Cum să trăieşti matematica: mic îndreptar

Manualul de analiză matematică pe care-l citeam când aveam douăzeci de ani începea astfel: „Faptele prezentate în acest volum…”. În carte, autorul construia totul plecând de la zero, ca şi cum ar fi construit propriul punct de vedere asupra realităţii. În prefaţă, el povestea că pentru a scrie cartea nu s-a folosit de bibliografie, ci a încercat să reconstruiască totul, verificând fiecare

potenţială breşă, de la fundaţiile teoriei către cele mai avansate aplicaţii. Construcţia era completă, autorul nu evita nicio dificultate, iar cartea era, în felul ei, *trăită.*

În fond, ce înseamnă să trăieşti matematica? Dacă matematica se ocupă de fapt cu studiul ideilor despre spaţiu, timp, funcţii şi alte obiecte matematice, dacă include între altele şi studiul raţionamentelor, atunci ce ar putea însemna să trăieşti un domeniu care are ca obiect de studiu idei abstracte? Şi prin ce sunt matematicienii diferiţi de alţi profesionişti, de ingineri, de pildă?

Fireşte, e loc de diferenţe de opinie. Fiecare matematician a fost sedus de o anumită temă matematică, de o problemă, de o idee. Cel mai mult vorbesc despre noi şi cel mai bine ne descriu ideile care ne atrag. Pentru o mai mare acurateţe a răspunsului, poate ar fi mai bine să ne întoarcem la paginile scrise de unii dintre cei mai îndreptăţiţi să povestească lucrul acesta.

Godfrey Harold Hardy (1877-1947) a fost un matematician britanic de elită, recunoscut pentru contribuţiile sale în analiza matematică şi în teoria numerelor. A devenit celebru pentru colaborările sale cu J.E. Littlewood şi S. Ramanujan şi are meritul extraordinar de a fi recunoscut înzestrarea nativă a lui Ramanujan şi de a-l fi ajutat să vină în Anglia pentru a-i înlesni o educaţie matematică serioasă. Între altele, Hardy a scris şi un eseu intitulat *A Mathematician's Apology.* Acest volum al lui Hardy mi se pare comparabil cu *Scrisorile către un tânăr romancier* ale lui Mario Vargas Llosa, pentru că în el sunt disecate secretele meseriei*. A Mathematician's Apology* a fost scrisă de G.H. Hardy în 1940, într-o perioadă în care, aşa cum scrie despre el un fost student, C.P. Snow, care l-a cunoscut bine, puterea lui creatoare, ca matematician, se afla într-un ireversibil declin. La un moment dat, în cartea amintită, Hardy îşi propune să aducă în discuţie „utilitatea" matematicii. E vorba despre aplicabilitatea directă a matematicii, utilitatea ei în nuanţa cea mai pragmatică a cuvântului, în sensul îmbunătăţirii vieţii, confortului şi al sporirii fericirii. Ca să discute aceste

lucruri, el analizează punctele de vedere asupra matematicii pe care le expun alţi autori în diverse eseuri din epocă.

Hardy scrie astfel: „Se poate obiecta că am definit «utilitatea» într-un mod prea restrâns, că am definit-o numai în termeni de «fericire» şi de «confort», şi că am ignorat efectele generale «sociale» ale matematicii, asupra cărora scriitori recenţi, cu simpatii foarte diferite, au pus un atât de pronunţat accent. Astfel, Whitehead (care a fost matematician) vorbeşte despre «extraordinarul efect al cunoaşterii matematice asupra vieţilor oamenilor, asupra întreprinderilor lor zilnice, asupra organizării societăţii»; iar Hogben (care e la fel de puţin înclinat către simpatie faţă de ceea ce eu şi alţi matematicieni numim matematică pe cât Whitehead e înclinat către simpatie) spune că «fără o cunoaştere a matematicii, gramatica mărimii şi a ordinii, nu putem planifica societatea raţională în care va fi îndestulare pentru toţi şi sărăcie pentru nimeni» (şi alte consideraţii cu o finalitate similară)”.

După aceste aprecieri, Hardy scrie că în opinia lui limbajul amândurora e prea exagerat şi că ambii autori ignoră distincţii evidente. Asta poate fi înţeles în cazul lui Hogben, pentru că el nu este matematician. Ceea ce înţelege el prin „matematică” e doar acea parte a disciplinei pe care Hardy o numeşte „şcolară”, care are un caracter foarte elementar şi mai degrabă introductiv. Pentru Hardy există şi un alt nivel al matematicii, pe care îl numeşte „matematică reală” şi care este acea parte a disciplinei ce l-ar interesa pe cercetător, pe creatorul de informaţie, pe cel care are nevoie să modeleze matematic un fenomen nou într-un câmp de studiu. Deşi e gata să admită că matematica „şcolară” are multe utilităţi sociale, Hardy crede că Hogben cu greu ar avea cea mai mică înţelegere a matematicii „reale”. Cu o nuanţă polemică, Hardy scrie despre Hogben: „Pentru el, matematica «reală» este un obiect demn de condescendentă milă”.

Cât despre Whitehead, Hardy are a-i face un alt reproş. Despre el scrie că „uită, în entuziasmul lui,

distincţii cu care e cât se poate de familiar. Matematica aceea care are un «efect extraordinar» asupra «întreprinderilor zilnice ale oamenilor» şi asupra «organizării societăţii» nu e matematica lui Whitehead, ci aceea a lui Hogben".

Nuanţa aceasta mi se pare importantă, pentru că în acest pasaj Hardy pune în evidenţă rolul formativ al matematicii, mai precis faptul că studiul detaliat al unei teme matematice induce un efect formativ şi constituie o experienţă revelatoare. Dar iată cum introduce Hardy necesarele distincţii: „Matematica aceea care poate fi folosită «pentru scopuri obişnuite de oameni obişnuiţi» e neglijabilă, iar cea care poate fi folosită de economişti sau sociologi cu greu se ridică la «standarde academice». Matematica lui Whitehead poate avea un efect profund asupra astronomiei sau fizicii, un efect foarte apreciabil asupra filosofiei – întrucât gândirea înaltă într-un domeniu are întotdeauna şanse să influenţeze gândirea înaltă dintr-altul –, dar are extrem de puţin efect asupra oricărui alt lucru. «Efectele ei extraordinare» pot fi văzute nu asupra oamenilor în general, ci asupra oamenilor ca Whitehead însuşi".

Pe lângă sublinierea vocaţiei formative a matematicii, pasajul acesta conţine şi expresia viziunii politice a lui Hardy, dorinţa lui ca rezultatele cercetărilor matematice să nu servească maşinii de război. Totodată, transpare în acest pasaj şi sarcasmul lui bine temperat, niciodată covârşit de aroganţă. În ultimă instanţă, *A Mathematician's Apology* este un text cu nuanţe sumbre. Pentru că e istoria unui matematician care se stinge, care nu mai lucrează, care nu se mai bucură să facă cercetare.

Dar întrebarea cea mai importantă ne pare a fi următoarea: ce afli atunci când practici matematica, atunci când încerci să înţelegi un domeniu în profunzime, atunci când mergi până la capăt cu observarea unui fenomen abia descoperit? Ce se întâmplă cu gândirea celui care urmează calea cercetării? Cum ajunge el să recunoască, să discearnă şi să aleagă lucrurile esenţiale, după ce s-a

antrenat să facă matematică şi s-a străduit să meargă cât de departe se poate în domeniul său? Ne imaginăm că e vorba despre o transformare profundă, una pe care nu o simţi imediat; ceea ce gândeşti, ceea ce scrii, ceea ce vezi şi înţelegi ajunge să te schimbe. Simpla practicare a matematicii face diferenţa. Istoria domeniului tău ajunge să te locuiască. Şi oare e puţin lucru? Sau, aşa cum scrie Hardy despre consecinţele matematicii: „«Efectele ei extraordinare» pot fi văzute nu asupra oamenilor în general, ci asupra oamenilor ca Whitehead însuşi”.

În secţiunea 28 a cărţii sale amintite, Hardy se întreabă dacă matematica face rău cuiva. În acest context, ajunge să se întrebe dacă matematica are vreun efect asupra artei războiului. După o scurtă şi oarecum stânjenită analiză (scria acele pasaje în vremuri deloc lipsite de tragism, pe vremea războiului), el trage concluzia că doar anumite ştiinţe aplicate au un efect direct asupra artei războiului, dar matematica, nu.

În acest context scrie următorul pasaj extraordinar, în care e expusă în detaliu tensiunea raportului dintre cercetător şi domeniul său: „Când lumea înnebuneşte, matematicianul găseşte în matematică un balsam incomparabil. Pentru că matematica este, dintre toate artele şi ştiinţele, cea mai austeră şi mai îndepărtată, şi un matematician ar trebui să fie, dintre toţi oamenii, acela care să-şi găsească refugiu acolo unde, aşa cum spune Bertrand Russell, se află «unul dintre cele mai nobile impulsuri ce ne pot scăpa din tristul exil al lumii reale». Din păcate, trebuie menţionată o rezervă – matematicianul nostru ar trebui să nu fie prea în vârstă. Matematica nu e un subiect contemplativ, ci unul creativ; nimeni nu poate să afle prea multă consolare în ea atunci când şi-a pierdut puterea sau dorinţa de a crea; şi asta se întâmplă mai devreme sau mai târziu oricărui matematician”.

*

Alain Connes, un matematician francez căruia i-a fost decernată medalia Fields pentru contribuţiile lui din domeniul algebrelor de operatori, a descris astfel trăirea

care însoţeşte o descoperire matematică: „Procesul verificării poate fi foarte dureros: îţi e foarte *frică* de ideea că ai fi putut greşi. Dintre cele patru faze, aceasta implică cea mai multă anxietate, pentru că niciodată nu ştii dacă intuiţia ta e corectă – la fel ca în vis, când de cele mai multe ori intuiţia ţi se dovedeşte greşită. Îmi aduc aminte că odată mi-a luat o lună ca să verific un rezultat: am trecut prin demonstraţie până la cel mai mic detaliu, până la obsesie – când aş fi putut pur şi simplu să verific logica argumentului cu calculatorul. Dar în momentul când iluminarea apare, îţi angajează emoţiile în aşa fel încât îţi e imposibil să rămâi pasiv sau indiferent. În acele rare ocazii când am trăit-o, recunosc că nu mi-am putut reţine lacrimile”.

Aceasta e o mărturie pe care o cred.

*

Să încheiem această discuţie cu următoarea explorare: când o informaţie este de natură matematică realmente utilă? Când e o teoremă importantă? întrebările acestea au sens, pentru că dacă ne-am propune să ştim *totul*, să înmagazinăm *totul*, atunci n-ar mai fi niciun fel de ştiinţă. Dacă informaţiile ar fi aşezate pe rafturile bibliotecii în mod haotic, fără o structură clară, şi dacă totul ar fi egal ca importanţă, atunci la ce ne-ar servi atâtea secole de istorie şi de strădanii? Chiar aşa, cu ce rămânem din toată aventura cercetării matematice?

Un posibil răspuns apare în *Ştiinţă şi metodă*, volumul lui Henri Poincaré din 1908. El scrie că „cele mai interesante fapte sunt acelea care pot fi folosite de mai multe ori, cele care au şansa de a reapărea”.

Şi mai departe: „Suntem norocoşi să trăim într-o lume în care există astfel de fapte. Să presupunem că în loc de optzeci de elemente chimice am avea optzeci de milioane, şi că nu ar fi unele comune şi celelalte rare, ci distribuite uniform. Atunci, de fiecare dată când am lua în mână o pietricică nouă am avea o mare probabilitate să fie compusă din nişte substanţe necunoscute. […] Într-o astfel de lume n-ar exista ştiinţă, şi poate nici viaţa nu ar fi

posibilă, pentru că evoluţia nu ar fi dezvoltat instinctele de auto-prezervare”.

Aşadar, trăim într-o lume în care ştiinţa e posibilă, tocmai pentru că lumea reală vine cu o anumită structură. Şi atunci, ce structură ar trebui să capete ceea ce ştim noi, aşa încât informaţiile pe care le deţinem să fie aşezate într-un mod cât mai accesibil, util şi pragmatic? Răspunsul ni-l sugerează Poincaré: faptele care au şansele cele mai mari să se repete. Adică principiile, faptele cu un caracter de generalitate în cadrul logic al unui domeniu, conceptele fundamentale. Ele trebuie să ne sugereze structura unor teorii, viziunea, acoperirea temelor. În spatele lucrurilor care se repetă se află structura, principiul care generează, invariantul. Şi un enunţ mai general: ştiinţa e posibilă acolo unde pot fi descoperite legi a căror aplicare să se poată repeta, în structuri iterabile, recognoscibile, care să conducă eventual către clasificări.

Iar atitudinea noastră etică faţă de cercetare înseamnă, de fapt, sincera noastră opţiune şi străduinţă de a identifica aceste legi, de a reflecta asupra lor, indiferent cât de dificile ar fi detaliile tehnice. Absenţa opţiunii etice ar însemna eludarea dificultăţii teoretice, a dificultăţii fundamentale pentru relevanţa problemei, şi reprezentarea unui aspect marginal drept principiu esenţial. O astfel de confuzie nu ar fi onestă din punct de vedere intelectual. Ar fi ca un portret realizat cu un aparat fotografic al cărui obiectiv s-ar concentra nu asupra chipului, ci asupra unui detaliu nesemnificativ situat în decor.

Diamantul din moştenirea de familie

Probabil că cel mai important lucru de care au beneficiat cei care s-au format în anii şaptezeci sau optzeci în România secolului trecut a fost contextul şcolar, şi includem aici întregul ansamblu, cu plusurile şi scăderile lui, cu stilurile de predare de la clasă, cu manualele şcolare şi conţinutul lor, cu raportul dintre profesori şi elevi, fără a uita să amintim autoritatea celui de la catedră,

într-o strictă legătură cu felul cum era definită autoritatea în societate în perioada istorică respectivă. Era un întreg complex de factori pe care i-am putea menţiona. Un loc aparte l-au jucat personalităţile de prim rang care au influenţat dezvoltarea şi practicarea domeniilor respective, şi România de atunci nu a fost lipsită de astfel de personalităţi. Datorită matematicienilor români activi în acele domenii şi felului cum au prezentat ei politicienilor din epocă importanţa matematicii, s-au putut realiza câteva lucruri de o extraordinară calitate. Despre ideea aceasta voi vorbi aici atunci când îl amintesc pe Nicolae Teodorescu.

L-am cunoscut pentru prima oară aşa cum l-au cunoscut şi alţi tineri matematicieni din generaţia mea: datorită unei diplome. Pe o scenă, după o olimpiadă naţională, am primit o diplomă de culoare albastră, cu efigia Societăţii de Ştiinţe Matematice, şi o strângere de mână. Aveam 13 ani. Mai mult nu-mi trebuia: eram câştigat pentru totdeauna, pentru că lumea de atunci atribuise valoare matematicii. Aveam un abonament la *Gazeta matematică*, lucram din *Culegerea de probleme* a lui Ţiţeica şi vedeam cât de eficientă este, chiar şi după 90 de ani de funcţionare neîntreruptă (atâţia erau pe atunci), tradiţia de a face matematică în jurul unui periodic lunar. Acum ştiu că acest fenomen de o asemenea perenitate şi de o asemenea calitate e unic în lume. Existau în Uniunea Sovietică *Matematika v şkole* şi *Kvant*, dar nici nu erau atât de vechi, nici nu şi-au putut continua activitatea în deceniile din urmă. Publicaţiile similare nord-americane, de sorginte mult mai recentă, nu oferă o selecţie de probleme pentru elevii din şcoala medie şi de liceu, dar fac o treabă excelentă cu studenţii, la nivel de facultate. De fapt, în America de Nord nu există un periodic cu probleme de gimnaziu. Din punctul de vedere al interacţiunii cu matematica elementară, lumea *Gazetei matematice*, administrată de Societate, era un cadru aparte. Nicolae Teodorescu a deţinut, din 1975 şi până în 1995, funcţia de preşedinte al Societăţii şi e responsabil

pentru atragerea către matematică a multora dintre noi.

Am participat de patru ori la taberele de vară ale *Gazetei matematice,* ca elev de liceu. La alte activităţi ale Societăţii, după ce am terminat liceul, am fost invitat ca membru al comisiei. Exista o similaritate între felul cum discutam noi despre problemele din *Gazeta matematică* în anii optzeci şi felul cum discutau între ei, despre problemele din epocă, matematicienii din anii douăzeci sau treizeci. De unde ştim asta? Din fragmentele de corespondenţă care ni s-au păstrat, din câteva pagini de memorii… E curios: vreme de un secol, în societatea românească, altminteri atât de schimbătoare, a existat ceva neschimbat.

Atunci când am ajuns la tabăra *Gazetei* din august 1985 eram interesat de probleme de geometria triunghiului, în stilul celor din monografia lui Traian Lalescu. Am descris într-un alt capitol ce s-a ales azi de geometria triunghiului şi cum informaţia utilă din vechea teorie s-a disipat în alte domenii. Pe atunci însă nu ştiam asta şi, dacă cineva ar fi aruncat o umbră de îndoială asupra opţiunii mele pentru geometria triunghiului, l-aş fi provocat la duel.

La tabăra de vară a *Gazetei* am văzut vreme de mai bine de o săptămână lecţii foarte interesante prezentate de profesorii care lucrau ca redactori ai *Gazetei*, Marcel Ţena şi Alexandru Constantinescu, care sunt amândoi excelenţi în domeniile matematicilor fundamentale. Îmi aduc aminte de o prezentare a lui Nicolae Teodorescu pe baza unor probleme selectate din reviste internaţionale; atunci am auzit prima dată de revista australiană *Parabola* şi de revista britanică *The Mathematical Gazette*. Mai cu seamă, ţin minte prezentarea pe care Daniel Tătaru a făcut-o problemelor de la olimpiada internaţională de matematică din anul acela. Daniel Tătaru tocmai revenise de la OIM, unde obţinuse unul dintre cele două scoruri perfecte de 42 de puncte din competiţie. Ascultându-l cum ne descria soluţiile, într-o sală de clasă de liceu1 în care eram strânşi cu toţii, vorbind cu claritate matematică menită să

depăşească dificultăţile cu naturaleţe, am avut pentru o clipă sentimentul că mai bine de atât mintea omenească nu poate funcţiona. Am înţeles încă de atunci că văd la lucru una dintre acele inteligenţe strălucite care pot atinge uluitoare performanţe tocmai pentru că aduc claritate acolo unde noi, ceilalţi, oamenii obişnuiţi, facem uriaşe eforturi pentru a opera cu nişte modeste distincţii. Partea interesantă cu aceste probleme de olimpiadă e că au conţinut elementar, deci enunţul lor e accesibil oricui; partea înspăimântătoare e că le rezolvă atât de puţini.

Pentru generaţia mea, meritul lui Nicolae Teodorescu a fost că a creat un mediu în care aceste interacţiuni au fost posibile. Asta vedeam atunci, cu ochii unui elev de liceu. Pentru matematici, meritul lui Nicolae Teodorescu rămâne că a studiat derivata areolară în anii treizeci, sau că mai târziu a contribuit la dezvoltarea mult citatului subiect care e cunoscut astăzi în cercetare sub numele de sistemele Moisil-Teodorescu. Posteritatea face dreptate cercetătorului prin numărul de citări.

Nicolae Teodorescu mi-a povestit la un moment dat despre perioada lui de liceu, pe care a găsit-o stimulantă şi plină de inspiraţie. Făcuse liceul în Bucureşti, la „Spiru Haret”. Era cu un an mai mic decât Mircea Eliade şi în acelaşi an de studii cu Constantin Noica; pe amândoi i-a cunoscut foarte bine. Mi-a spus că recunoaşte majoritatea evenimentelor evocate în *Romanul adolescentului miop*, pe care-l descria drept o transpunere foarte apropiată de realitate a unor evenimente care avuseseră loc la „Spiru Haret”. Mi-a istorisit cum, în perioada studenţiei lor, la finele anilor douăzeci, a venit Constantin Noica să audieze cursuri la Facultatea de Matematică şi cum l-a întrebat multe lucruri despre diverse fenomene matematice; la fel ca în cazul multor altor umanişti dotaţi cu o inteligenţă pătrunzătoare, întrebările lui puteau fi foarte diferite, de la chestiuni elementare, de natură mai degrabă tehnică, până la aspecte conceptuale, care ţineau de completitudinea unei teorii. Nicolae Teodorescu îl cunoscuse foarte bine şi pe Dan Barbilian, cu a cărui familie avea şi legături de

rudenie; se întâmplase în multe situaţii, uneori cu un anunţ foarte scurt, ca profesorul Barbilian să-l roage pe profesorul Teodorescu să-l înlocuiască la curs. Şi tot de la Nicolae Teodorescu am aflat cât de dificilă a fost, sub toate aspectele, organizarea Congresului de Matematică din 1956 de la Bucureşti, atunci când Jacques Hadamard a venit în România şi când Wilhelm Blaschke s-a întâlnit ultima dată cu Dan Barbilian. Mi-a povestit cum l-a cunoscut, la una dintre casele de creaţie pe care oamenii de ştiinţă le împărţeau cu scriitorii, pe Camil Petrescu. Autorul *Patului lui Procust* era convins că ar trebui socotit printre cei mai mari matematicieni români în viaţă, pentru că viziunea lui filosofică îi permitea o perspectivă de ansamblu asupra matematicilor. Şi vorbea foarte serios. Din ceea ce-mi povestea Nicolae Teodorescu, mi se părea că văd un Camil Petrescu în întregime complementar celui descris de Eugen Ionescu în *Nu*, gata să tremure dacă cineva exprimă o critică faţă de textul său.

Lumea matematicii are o memorie aparte. Probabil că dacă n-aş fi întâlnit olimpiadele şcolare şi dacă în cultura română n-ar fi existat *Gazeta matematică*, n-aş fi devenit matematician. Pentru mine, atracţia literaturii a fost întotdeauna extrem de puternică, chiar şi în momentele când lucram intens matematică. Ceea ce a schimbat esenţial formaţia mea a fost faptul că am fost atras de mediul pe care l-am socotit drept cel mai inteligent în epocă2.

Am publicat primele două probleme propuse în *Gazeta matematică* pe când eram în clasa a XI-a şi urmam Liceul „I.L. Caragiale” din Bucureşti. Includerea celor două probleme în revistă avea să fie decizia editorială a lui Liviu Pârşan. Şi pe el l-am cunoscut tot graţie taberelor *Gazetei*, dar în clasa a XII-a mi-a fost şi profesor la clasă, la „Caragiale”; n-am să uit străduinţa cu care a încercat să-i facă pe medicinişti să înveţe teoria grupurilor înainte de examenul lor la Facultatea de Medicină. Nu părea să înţeleagă că nu toţi oamenii sunt interesaţi de matematici.

Nicolae Teodorescu îl preţuia mult pe Liviu Pârşan.

Aveam să văd de ce abia într-o seară din vara lui 1991, când comisia care trebuia să pregătească subiectele pentru Concursul *Gazetei* se reunise într-o cameră de hotel din Câmpulung Muscel, pentru o şedinţă de lucru. Alături de Nicolae Teodorescu, erau de faţă Marcel Ţena, Alexandru Constantinescu, Liviu Pârşan, Iulian Beju, Dumitru Acu şi cu mine. Se discutau seturi de probleme pentru trei grupe de vârstă: elevii din clasele VII-VIII, IX-X şi XI-XII. Concursul *Gazetei* avea un format foarte interesant: era o problemă de tehnică matematică şi o alta de raţionament matematic, iar Nicolae Teodorescu acorda atenţie distincţiei dintre cele două feluri de a face matematică. La un moment dat, în discuţia comisiei s-a conchis că ar mai fi nevoie de o problemă. Nicolae Teodorescu a spus că ar fi de preferat să fie o problemă de algebră, potrivită pentru clasele XI-XII, pentru proba de raţionament. S-a întors către Liviu Pârşan şi l-a întrebat: „Liviu, ai putea să ne sugerezi o problemă?”. Răspunsul a venit imediat: „Sigur că da, domnule academician”. Şi a scos dintr-un caiet o foaie pe care se afla o problemă care corespundea întocmai caracteristicilor cerute de nevoile concursului. A întins foaia către Nicolae Teodorescu. Mi se întâmpla să nu-mi dau seama întotdeauna când Liviu Pârşan zâmbea sau când era serios, dar de data aceea sigur zâmbea. „Dacă aveai problema, de ce nu ziceai nimic?”, a întrebat Nicolae Teodorescu. „Dacă nimeni nu m-a întrebat nimic”, a adăugat Liviu Pârşan.

Meritul lui Nicolae Teodorescu era că ştia să dea credit fiecărui colaborator pentru calităţile lui de excepţie, şi asta permitea programului construit de el în anii optzeci să fie atât de stimulant şi să transmită atâta inspiraţie.

Şi nu era puţin lucru, într-o realitate care nu părea concepută pentru a recunoaşte excelenţa performanţelor culturale. Dar, de fapt, când în istorie a existat o asemenea realitate? Când în istorie a existat o lume ideală, dedicată doar adâncirii conceptelor fundamentale? Nu ar fi oare un semn de naivitate fie şi să invocăm o asemenea imagine?

1. Era liceul din Curtea de Argeş, cel situat în proximitatea mănăstirii.

2. Această apreciere ar merita diminuată după ce între timp am văzut cum se ceartă între ei matematicienii bucureşteni. Nu voi zugrăvi aici fresca aceasta, ci voi menţiona doar că tabloul ei ar putea concura – ca număr de personaje şi intensitate – cu oricare dintre pereţii exteriori ai Voroneţului.

Codul secret – note pentru o mărturisire literară1

Una dintre întrebările care-mi sunt adresate din ce în ce mai des e când încep să scriu în engleză. O astfel de întrebare pleacă de la premisa că pentru fiecare scriitor român, odată trecut de frontiera de vest a ţării de origine, nu mai e decât o chestiune de timp până când să-şi propună deplina lepădare de presupusa neîmplinită identitate românească. Bunul-simţ comun pare să ne întrebe: nu ne dorim asta cu toţii? Privită astfel, identitatea românească apare ca neîntreagă, dacă nu cumva ca un neajuns. Dacă tot plecăm din România, dacă educaţia noastră formală trece prin cadrul formativ al altei culturi, dacă această cultură exercită o puternică influenţă asupra noastră, nu ar fi oare de aşteptat să o adoptăm integral? În plus, ştim foarte bine că nu am lăsat în urmă o lume perfectă, ştim că nu avem nostalgii, nici regrete. Câţiva dintre contemporanii noştri ne-au deranjat îndeajuns, alţii ne-au enervat cu insistenţă. Am descoperit că România nu e o şcoală a caracterelor. Nu a venit momentul să scăpăm de contemporanii noştri şi în spirit, după ce am reuşit să-i evităm din punct de vedere geografic?

Pentru mine lucrurile au stat altfel. Am plecat din România în 1996. Am locuit de atunci în Michigan, Arizona şi California şi am scris mai multe cărţi de literatură în limba română. Nu plănuiesc să-mi schimb limba literară. Vreme de mai bine de un deceniu am colaborat la mai multe periodice culturale din România. Am avut ocazia să port numeroase dialoguri. Am participat de mai multe ori

la conferinţe sau manifestări literare ca scriitor român. Am primit invitaţii să scriu texte pentru publicaţii care apar în alte locuri din lume – în calitate de scriitor român. Foarte multe lucruri mi se întâmplă de parcă nu aş trăi lângă Los Angeles, ci în oricare dintre locurile unde cândva mă simţeam acasă, în Bucureşti, de exemplu. Mai mult, am optat să scriu literatură de ficţiune despre realitatea românească. Am scris despre România de dinainte de 1989 şi am scris şi despre România de după. Am scris şi despre România viitorului, atât cât am văzut eu despre ea…

Ar trebui să încep cu începutul. Am scris prima nuvelă la şaptesprezece ani. Era neizbutită şi sunt mândru că mi-am dat seama de asta destul de repede. Nu am făcut niciun rău: nimeni nu a văzut nimic. Mai târziu, m-am specializat în proză, după o lungă perioadă în care am încercat diverse formule poetice, fără să mă conving că am surprins esenţialul în vreuna dintre ele. Am avut momente când am fost fericit că am exprimat o anumită imagine sau o anumită idee, dar, cu toate acestea, mi s-a părut că întreaga construcţie e prea puţin. Formula literară optimă îmi pare a fi cea care îţi permite să spui esenţialul, să lepezi balastul, să accezi la un adevăr ascuns dincolo de cosmetica realităţii, de minciunile pe care suntem înclinaţi să le credem sau să le urmăm. Am învăţat asta în matematică: matematica spre asta aspiră, spre acest ideal debarasat de afirmaţii repetitive sau de locuri comune ne instruieşte să ne îndreptăm.

În perioada când am scris poezie, înainte de vârsta de 24 de ani, am descoperit câteva lucruri. În poem, chiar şi când scrii pe ton de glumă, nu îţi vine să minţi, nu vrei să aproximezi, nu vrei să-ţi baţi joc, nu vrei să-ţi cauţi scuze sau să accepţi jumătăţi de măsură. Concizia e parte a jocului. Pe de altă parte, am descoperit că proza scurtă e o specialitate la fel de onestă. Cred că momentele mele cele mai bune pentru proză scurtă au fost 1994 şi 1997, când am scris câte cinci sau şase texte. Am aşteptat aproape un deceniu până când acele texte să fie reunite în volum. Am scris în apartamentul din Bucureşti, într-o casă

de la ţară, cât încă mai eram în România, în biblioteca de la Michigan State University, când eram student şi nu aveam încă un computer, în biroul meu de la Departamentul de Matematică, iar una dintre proze a fost scrisă pe un aeroport, când am avut de aşteptat prea mult între două zboruri şi febrilitatea de a scrie atinsese maximul. Dar nu interesează statistica, nici locurile. Toate aceste informaţii nu trec în text, sunt balast, sunt decor. Aşa cum spuneam, altul e criteriul: a izbutit oare vreunul dintre aceste texte să spună ceva important, să decodifice un mesaj ascuns în ambianţa nesigură a realităţii? Apartenenţa la o cultură nu se manifestă prin locul unde e scris textul, ci prin modul în care încerci să esenţializezi actul literar. Urmăreşti o idee într-un stil care are sens în contextul unei anumite viziuni culturale. Această viziune e influenţată de obicei foarte mult de cultura de origine. În cultura română, lucrurile importante, cele de unde ne selectăm temele literare, par mereu altele decât în alte culturi. Ne selectăm temele într-un mod diferit, pe care-l descoperim abia atunci când vedem că unele dintre lucrurile importante pentru noi nu sunt importante pentru alţii. Această percepţie oarecum diferită a ceea ce merită povestit şi nuanţat face greu de tradus unele texte care au făcut de mult carieră în România.

Pentru mine, o altă regulă a jocului în ceea ce priveşte proza scurtă e ca nici măcar două dintre istorii să nu fie la fel. Să scrii un roman de patru sute de pagini pe o soluţie literară clasică, mergând pe ceva dinainte gândit, la nevoie gândit de alţii, de exemplu pe soluţia literară inventată de Camil Petrescu sau pe cea inventată de Jules Verne, mi se pare facil. Cred că marele efort e să imaginezi la fiecare nouă istorie o soluţie literară firească, naturală, dar distinctă, de o particularitate care să solicite cititorul, să-i dezvăluie un nou mod de comunicare, o nouă descoperire, o şarjă. Se ştie de mult că fiecare text îşi conţine propria sa poetică. Nu cred că ar interesa un experiment de utilizare limitată, ci o soluţie întreagă, matură, împlinită, publicată după cuvenită chibzuinţă şi

aşteptare. Ideal ar fi ca în fiecare text scriitorul să fie convingător, tema să intereseze, efortul construcţiei originale să aibă sens. Problema se poate pune aşa: ai la dispoziţie zece pagini şi o poveste. În spatele acestei poveşti se află ceva esenţial, un adevăr pentru care ai fi în stare să te baţi în duel. Nu contează dacă ai scris trei mii de pagini sau zece până atunci. Contează dacă sinteza pe care o propui e profundă.

E adevărat că unii autori reuşesc asta într-un roman. Alţii reuşesc în poem. În spaţiul literar românesc îl preţuim atât de mult pe Mateiu Caragiale pentru soluţia literară atât de originală, bine şlefuită şi rafinată din *Craii de Curtea-Veche* (o carte publicată în primă ediţie în 1929), o soluţie cu atât mai admirabilă cu cât, putem s-o spunem, esenţializează lumea românească2. Sunt convins că ideea unor personaje care sunt seniori ziua şi satiri noaptea spune ceva despre România.

Borges scria despre H.G. Wells că nuvelele sale parcă n-ar fi expresia unui singur autor, ci a unei întregi literaturi. Ne gândim la acele texte de proză atât de diferite scrise de Wells, la acea exercitare atât de neaşteptată şi de unică a imaginarului. Fiecare dintre acele istorii răspunde unei temeri, unei probleme cât se poate de importante: Cum va fi viitorul? Ce se va întâmpla cu noi, ca specie? Nu am mers oare prea departe cu exagerările noastre? Ne dăm seama ce admirăm într-o astfel de literatură: confirmarea a ceea ce Milan Kundera numea, într-un text publicat în octombrie 2006 de *The New Yorker*, „etica esenţialului”. În fond, cum să nu ne intereseze un text literar care să-şi dorească să surprindă în mod concis nucleul unei realităţi, exprimat prin maximum de viziune şi de imaginaţie?

Cred că literatura ar trebui să fie un spaţiu prin nimic diferit de cercetarea matematică, de unde pot fi împrumutate cu succes unele analogii. În cercetarea matematică interesează soluţia completă a unei probleme apărute în mod natural, o problemă căreia poţi să-i explici legitimitatea şi consistenţa. Pentru astfel de soluţii ai

nevoie de instrumente, de tehnici de lucru, de imaginaţie şi de o doză de încăpăţânare. Nu poţi să faci cercetare pe o singură idee toată viaţa. Onest e să apreciezi de ce e important să discuţi o anumită problemă, să te baţi pentru fiecare nou pas, pentru fiecare nou nivel de înţelegere şi de coerenţă, pentru o mai mare adâncime între locul de unde ai plecat şi cel unde ai adus lucrurile. Trebuie să înţelegi în fiecare stadiu al unui proiect valoarea calitativă a locului unde te afli şi ce dificultate trebuie înlăturată până la a obţine o soluţie completă. Nu cred că experienţa literară a celui care povesteşte ar fi altfel.

Mi-aş îngădui să invoc aici unul dintre textele mele de proză scurtă, cel pe care-l consider textul în care această încercare de sintetizare mi-a izbutit cel mai bine. Ideea mi-a venit în februarie 1999, în timp ce audiam un curs de geometrie diferenţială[3]. Tema cursului din acea zi nu avea nicio legătură cu tema literară a textului pe care aveam să-l scriu câteva ore mai târziu şi unde îmi propuneam să surprind Bucureştiul, un oraş întreg sintetizat printr-o poveste care să-l cuprindă într-o singură metaforă. Eram în una dintre sălile de curs din Wells Hall, de la Michigan State University, la unul dintre acele cursuri avansate în care profesorul nu era audiat decât de patru sau cinci studenţi. Deodată, în timp ce urmăream o demonstraţie, am avut viziunea unei uriaşe tobe vibrând, pe care era aşezat la prima oră a dimineţii oraşul în care trăiesc mulţi dintre prietenii mei, cu toată arhitectura lui extravagantă, cu fragmente de clădiri rămase din epoci de mult dispărute. Şi am scris, într-o singură sesiune de lucru care a durat şase ore, o nuvelă pe care o consideram pe atunci ca fiind textul ce surprinde cel mai bine vocea mea literară. Câţiva ani mai târziu, am folosit acel punct de vedere narativ atunci când am scris romanul *Venea din timpul diez*. Actul literar devenise pentru mine o bătălie pentru a sintetiza şi a exprima esenţialul, aşa cum în matematică te străduieşti în demonstraţia unei teoreme de clasificare să obţii completarea tuturor cazurilor. Îmi aleg personajele în aşa fel încât ele să surprindă, prin simpla

lor construcţie literară, cheia unei lumi. Cine ar fi putut fi martorul potrivit prin ochii căruia să se vadă România anilor nouăzeci, România tranziţiei, a schimbării dintr-o lume într-alta? Imaginea care m-a urmărit atâţia ani a fost aceea a unui bătrân straniu, pe jumătate vagabond, pe jumătate savant, care audiase cursurile noastre de matematică la Universitatea Bucureşti, la începutul anilor nouăzeci. Cândva, în urmă cu nişte ani, stătusem lângă el într-o sală de curs de la celălalt capăt al lumii şi audiaserăm împreună un curs în care se prezentau o teoremă şi o demonstraţie similare. Plecând de la imaginea lui, trecerea anilor mi-a îngăduit să văd apariţia unui personaj literar. Iată construcţia pe care am propus-o atunci când am scris despre

„Bătrânul al cărui al doilea nume era Sfântul Petru, pe care l-am văzut întâia dată la Piaţa Romană, în vara lui 1988, purtând un sacou jerpelit, cu buzunarele lărgite, rupte şi doldora de cărţi, cărând în mizere pungi de un leu tot felul de terfeloage desfoliate, tratate mirabile, manuale sau ediţii apocrife ale *Filocaliei*.

Imaginează-ţi cel mai paşnic personaj din lume, un bătrân hrănindu-se numai cu pâine goală (o începea de dimineaţă, la prima oră, şi către seară ajungea cu molfăitul cam la trei sferturi, şi asta îi era tot), petrecându-şi tot timpul fie la cursurile tehnice de la Arhitectură sau Politehnică, fie la Măgurele, la Fizică, fie alteori la Matematică. Locuia undeva la intersecţia străzii Polonă cu Mihai Eminescu, într-un cotlon mai de nimeni ştiut, unde iniţiaţii spuneau că s-ar afla, în condiţii de subterană amintind de adăposturile antiaeriene din vremea războiului, cea mai mare bibliotecă din Bucureşti, net superioară ca număr de volume Bibliotecii Academiei, care ar fi – după statistica Bibliotecii Congresului – a noua în lume. Imaginase un sistem propriu de fişare, clasificare, ordonare şi căutare a volumelor, aşa încât nu era niciodată pierdut în infernala lui bază de date. Era un spaţiu aparte subsolul acela, cu ample ramificaţii către canalizare, iar

fiecare cotlon era umplut cu dosare, volume fără coperţi, fotocopii, ediţii uitate, toate semnate de mulţi, foarte mulţi autori obscuri de care nimeni nu auzise vreodată, ca şi cum biblioteca lui s-ar fi format ca o alternativă plauzibilă la întregul univers. Spaţiul acela era laborator şi sală de lectură (tu l-ai fi găsit prea puţin confortabil, dar pentru el nu conta), lăcaş de meditaţie şi sală de rugăciune cu pereţii acoperiţi, acolo unde nu erau rafturi, de icoane” 4.

Lăsând deoparte nuanţele ironice pe care o asemenea descriere le implică, pasajul acesta e pentru mine important pentru că, cel puţin atât cât am văzut eu, în cultura română cele mai valoroase contribuţii le-au produs marginalii. Numărul celor descoperiţi sau înţeleşi deplin foarte târziu sau numai după moartea lor e atât de mare, încât nu se poate să nu te pună pe gânduri.

M-a interesat să scriu despre Bucureşti, să surprind esenţialul despre acest spaţiu geografic şi pentru că nu vreau să evit să răspund provocării. Nu cred în existenţa unor criterii aparte pentru literatura exilului. Nu mai cred în experienţele „dramatice” ale exilului de azi, nu în sensul acelui discurs lacrimogen, siropos, patetic pe care-l mai auzim uneori. Cei care au plecat din Europa de Est după 1990 nu au suferit aşa cum au suferit cei care au fost nevoiţi să-şi părăsească ţara înainte de căderea Cortinei de Fier. Nu sunt un prizonier al destinului meu: pot călători şi pot locui acolo unde doresc. Sunt responsabil pentru ceea ce aleg şi gesturile mele nu sunt forţate de o situaţie politică ireconciliabilă, aşa cum s-a întâmplat în cazul altor scriitori înainte de 1989. Trăiesc un destin pe care mi l-am ales, aşa cum aleg cărţile pe care le citesc, şi mă străduiesc să citesc numai din plăcere. Totuşi, e adevărat că patria lăuntrică ne rămâne pentru totdeauna cea în care am deschis ochii, cea din copilărie, universul acela iluzoriu şi levitant cu care ni se întâmplă să comparăm totdeauna ceea ce trăim. Or, eu ştiu foarte bine că acel spaţiu nu mai există. Ne amintim însă acel sentiment de plenitudine şi de lipsă de griji pe care îl aveam numai la vârsta de şapte sau

de opt ani. Acel sentiment ne deschide porţile către surprinderea codului secret al unui spaţiu geografic, al unei lumi. Vedem şi ne imaginăm cu ochii cu care vedeam altădată, fără să ştim că ni se întâmplă asta, spaţiul ideal, dintre toate vârstele cea mai fericită.

Începând cu jumătatea anilor şaptezeci, am făcut multe călătorii prin toate colţurile României. Până pe la finele anilor optzeci am fost aproape peste tot. Sunt oraşe pe care le cunosc în detaliu şi pe care mi le amintesc aşa cum erau înainte de transformările din anii optzeci, când multe centre istorice ale oraşelor au fost distruse într-un efort arhitectonic care năzuia să demonstreze superioritatea socialismului. Erau transformări care au alterat – din păcate – identitatea istorică a unor locuri. Păstrez genul acela de amintiri pe care, de obicei, cei din generaţia noastră nu le mai au. Fără intenţia de a exagera în vreun fel, îndrăznesc să spun că ştiu foarte bine România. În toamna lui 1985, am urmărit cu amărăciune cum centrul vechi al Târgovişte a fost dărâmat, casă după casă. Într-o seară m-am uitat ceasuri în şir cum cad zidurile. Erau ziduri groase, de cărămidă, în care mortarul se transformase în nisip şi din care igrasia risipea în aer un miros rânced. Astfel de scene trec în tine, se depun în straturi succesive şi distincte ale memoriei şi ajung să te urmărească, să-ţi răsară în minte atunci când tu locuieşti de mult într-o altă lume şi te ocupi cu alte lucruri. Te urmăresc chiar şi atunci când ai vrea să fii altceva. Şi adevărul e că nu poţi fi altceva atâta vreme cât porţi cu tine această memorie care e premisa şi substanţa felului în care tu înţelegi lumea.

Pe de altă parte, eşti conştient, ca scriitor, că literatură de ficţiune în registrul realist despre o anumită realitate concretă se poate scrie numai dacă trăieşti acolo, numai dacă eşti imersat bine în realitatea aceea. Czesław Miłosz a spus asta. Inevitabil, mai devreme sau mai târziu, dacă nu trăieşti într-un loc, evoluţiile contemporane îţi depăşesc percepţiile. Ajungi depăşit, demodat, dacă persişti în teme şi direcţii pentru

care interesul se stinge. Poveştile cele mai frumoase pe care ni le imaginăm expiră, chiar dacă nu ne face plăcere să admitem asta. Au loc evoluţii pe care nimeni nu le-ar putea anticipa şi care trebuie trăite pentru a fi înţelese.

Literatura poate să-şi propună să cerceteze şi să înţeleagă, să exploreze posibilităţile realităţii, să continue această realitate, să o prelungească, extinzându-i rezervele de imaginar în direcţiile sugerate de necesitatea sintezei cu semnificaţie. Nu e vorba de pamflet, nici de literatură propagandistică, ci de altceva, care nu serveşte vreunei cauze din această lume. Etica unei astfel de literaturi nu admite materializare, adică, mai precis spus, nu admite un echivalent în spaţiul practic, al politicului. Nu admite *aplicaţii.* Dimpotrivă, are multiple posibilităţi de confruntare cu spaţiul politicului, deşi literatura poate foarte bine să se inspire şi să preia personajele din mediile acestei lumi. Nu e vorba în niciun caz despre o simplă imitare a realităţii, ci de căutarea consecinţelor ultime ale unor fapte cu rădăcini reale.

Pentru a nu discuta în abstract şi a menţiona aici două exemple, voi reaminti tema romanului *Primul secol după Béatrice* de Amin Maalouf. Acolo, autorul explorează până la capăt ipoteza că ingineria genetică ar putea influenţa distribuţia naşterilor şi ce s-ar întâmpla dacă părinţii ar prefera naşterea unor băieţi în locul naşterii unor fete. E o problemă literară care pleacă de la o îngrijorare reală, un text în care literatura îşi asumă un rol de cercetare, de explorare. Apoi, într-unul dintre romanele sale, Mario Vargas Llosa îşi propune să exploreze una dintre temerile imaginarului colectiv, dezvoltând iluzia într-un ritm halucinant: cum ar fi dacă armata boliviană ar invada Perú? Şi de ce oare astfel de lucrări ar fi mai interesante decât, să zicem, memoriile sau jurnalele, decât literatura documentară în general? De ce ar fi ficţiunea mai interesantă decât lucrările *non-fiction*? Se poate întâmpla ca literatura de ficţiune să reuşească să identifice o temă substanţială care să devină vizibilă numai atunci când e ilustrată într-un roman sau într-o proză scurtă, deşi

acele fapte nu s-au întâmplat întocmai vreodată. Se poate ca o astfel de lucrare de ficţiune să surprindă esenţa într-un fel în care simpla transcriere a biografiei noastre să nu reuşească să o facă. În România, în perioada de după 1990, pentru ani buni informaţia de natură documentară a interesat cel mai mult. După ce informaţia de natură istorică din jurnale şi memorii a fost asimilată, o parte importantă a publicului şi-a întors atenţia către ficţiune.

Astfel, sfidarea rămâne mai departe aceeaşi: punctul de plecare este realitatea, dar ştim foarte bine că ceea ce ne interesează se află dincolo de ea, în acel spaţiu al ideilor generale, al principiilor, acolo unde enunţul descoperirilor noastre s-ar putea sintetiza, uneori, în formule concentrate care îşi propun să atingă, pentru o scurtă clipă, luciditatea.

1. O primă versiune a acestui text a fost prezentată pe 22 noiembrie 2006 la Centrul Cultural din Piteşti şi publicată în revista *Argeş*, din decembrie 2006, la invitaţia lui Jean Dumitraşcu. O a doua versiune a fost inclusă în volumul *Distanţe, demoni, aventuri*, Editura Tritonic, 2008. Eseul pe care îl prezentăm aici pentru prima oară reprezintă versiunea română integrală a textului „The Secret Code, Notes for a Literary Confession", inclus în antologia *Romanian Writers on Writing*, editată de Norman Manea şi coeditată de Sanda Cordoş pentru seria „The Writer's World", coordonată de Edward Hirsch la Trinity University Press, antologie publicată în 2011. Datorez mulţumiri dlui Norman Manea pentru invitaţia de a propune acest text pentru amintita antologie; l-am revăzut şi rescris cu acel prilej.

2. Această afirmaţie nu este o exagerare. Vezi, de exemplu, Matei Călinescu, *Mateiu I. Caragiale: recitiri*, Editura Polirom, Iaşi, 2007.

3. E vorba de cursul de geometrie riemanniană, predat de profesorul Bang-Yen Chen în anul universitar 1998-1999.

4. Fragment din nuvela „Să auzi forma unei tobe",

din volumul *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2002.

Table of Contents

Prolog
Versiunea întregită a realităţii
Cărţi privite dinlăuntru
Istoria unei viziuni medievale (o poveste de la 1350)
O provocare pentru vremurile noastre: predarea geometriei
Citindu-i pe Huygens, Newton şi Euler
Istoria lui Meusnier
Sophie Germain
Despre curbură (partea întâi)
Gheorghe Ţiţeica
Povestea lui Sebastian Kaufmann şi a Gazetei matematice de acum un veac
De la Programul de la Erlangen, al lui Felix Klein, la poemele lui Ion Barbu din Joc secund
Între laborioasa barbarie şi umanismul cel nou: istoria şi semnificaţia spaţiilor Barbilian
Un exemplu de teorie al cărei timp se stinge
O prezenţă: Laurenţiu Panaitopol
Povestind matematica în vremuri schimbătoare
Nu e vorba doar de forma universului, ci şi de logica lui
Despre curbură (partea a doua)
Cum să trăieşti matematica: mic îndreptar
Diamantul din moştenirea de familie
Codul secret – note pentru o mărturisire literară –